PASVALIO KRAŠTO
13-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2011 m. lapkričio 25 d.

Uždaviniai vyresniųjų klasių mokiniams

1. Rasti sumą

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!.$$

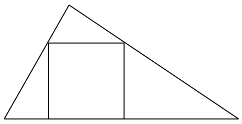
2. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)<2.$$

3. Ar galima suvynioti kubą į kvadratinį popieriaus lapą, jei lapo kraštinė yra tris kartus ilgesnė už kubo briauną?

4. Kiekvienas plokštumos taškas nudažomas raudona arba mėlyna spalva. Įrodykite, kad, laisvai pasirinkus teigiamą skaičių d, galima rasti ta pačia spalva nudažytų taškų, tarp kurių atstumas lygus d.

5. Kvadratas, kurio kraštinės ilgis yra a, įbrėžtas į trikampį (žr. 1 pav.), kurio pagrindo ilgis lygus b. Įrodykite, kad kvadrato plotas negali viršyti pusės trikampio ploto.



1 pav.

6. Tegu $a_1<a_2<\ldots<a_{100}$ yra realieji skaičiai. Raskite visus realiuosius skaičius x, su kuriais funkcija

$$f(x)=\sum_{i=1}^{100}|x-a_i|=|x-a_1|+|x-a_2|+\ldots+|x-a_{100}|$$

įgyja mažiausią reikšmę.

7. Tegu $a_1<a_2<\ldots<a_{44}$ yra realieji skaičiai, ne didesni už 125. Įrodykite, kad tarp skirtumų $d_i=a_{i+1}-a_i,\ i=1,2,\ldots,43,$ reikšmių yra tokia, kuri įgyjama ne mažiau kaip 10 kartų.

8. Yra skaičių seka, kurios nariai apibrėžiami taip:

$$x_1=x_2=1,$$
$$x_{n+1}=2011x_n+2012x_{n-1},\ \ n\geq 2.$$

Raskite liekaną, gaunamą dalijant x_{2011} iš 3.

9. Raskite skaičių natūraliųjų skaičių a, kuriems esant yra toks sveikasis skaičius b, $0\leq b\leq 2011$, kad abi lygtys

$$x^2+ax+b=0 \ \text{ ir } \ x^2+ax+b+1=0$$

turi sveikų sprendinių.

10. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases}\dfrac{5xy}{x+y}=6,\\[2mm] \dfrac{4xz}{x+z}=3,\\[2mm] \dfrac{3yz}{y+z}=2.\end{cases}$$