



PASVALIO KRAŠTO
13-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2011 m. lapkričio 25 d.

Uždaviniai jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Devyni vienodi rašikliai kainuoja 11 litų su centais, o trylika tokių pat rašiklių kainuoja 15 litų su centais. Kiek kainuoja vienas rašiklis?
2. Įrodykite, kad skaičius $p^2 - 1$ dalijasi iš 24, jei $p > 3$ yra pirminis skaičius.
3. Ar galima užpildyti $n \times n$ lentelę skaičiais $-1, 0, +1$ taip, kad tų skaičių sumos kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir abiejose įstrižainėse būtų skirtingos?
4. Raskite visus sveikųjų skaičių x, y ir z trejetus $(x; y; z)$, kuriems esant galioja lygybės
$$x + y = 2 \quad \text{ir} \quad xy - z^2 = 1.$$
5. Iš keturženklio skaičiaus A , kurį sudaro skaitmenys 1, 3, 5 ir 7, atimtas keturženklis skaičius B , sudarytas iš skaitmenų 2, 4, 6 ir 8. Raskite galimai mažiausią teigiamą skirtumą $A - B$.
6. Raskite skaičiaus $a = 1! + 2! + \dots + 2011!$ dalybos iš 18 liekaną. Čia $n! = n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$, $n = 1, 2, \dots, 2011$, yra skaičiaus n faktorialas.
7. Tegu $a_1 < a_2 < \dots < a_{44}$ yra natūralieji skaičiai, ne didesni už 125. Įrodykite, kad tarp skirtumų $d_i = a_{i+1} - a_i$, $i = 1, 2, \dots, 43$, reikšmių yra tokia, kuri įgyjama ne mažiau kaip 10 kartų.
8. Nustatykite, kiek sprendinių turi lygtis

$$\left(\frac{2x^2 - 5}{3} \right)^{x^2 - 2x} = 1.$$

9. Kiek yra natūraliųjų skaičių n , kurie tenkina nelygybę

$$\left(n - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(n - \frac{3}{2} \right)^3 \cdot \left(n - \frac{5}{2} \right)^5 \cdot \dots \cdot \left(n - \frac{4021}{2} \right)^{4021} < 0?$$

10. Su kuriais natūraliaisiais skaičiais k iš eilės einančių k natūraliųjų skaičių suma dalijasi iš k ?