PASVALIO KRAŠTO MOKINIŲ VIENUOLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2009 m. lapkričio mėn. 20 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

U Ž D A V I N I A I
VYRESNIŲJŲ KLASIŲ MOKINIAMS

1. Kaip per trikampio viršūnę nubrėžti tiesę, nekertančią trikampio, kad atstumų nuo kitų dviejų to trikampio viršūnių iki tos tiesės suma būtų didžiausia?

2. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais skaičiais $n>1$ teisingos nelygybės:

$$\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n.$$

3. Rasti visus natūraliųjų skaičių trejetus $(x;\,y;\,z)$, tenkinančius lygtį

$$x+y+z=xyz\,.$$

4. Dviejų kubų, kurių briaunų ilgis yra lygus 1, centrai sutampa. Įrodykite, kad jų bendros dalies tūris yra nemažesnis už $\frac{\pi}{6}$.

5. Raskite aritmetinę progresiją, kurios pirmųjų n narių suma S_n yra lygi n^2 su visais $n\geq 1$.

6. Nesinaudodami logaritmų lentelėmis, įrodykite, kad

$$\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}>2.$$

7. Įrodykite, kad $a+b+c$ ir $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ negali būti abu lygūs nuliui, kai a, b ir c nelygūs nuliui realieji skaičiai.

8. Tegu x ir y yra teigiami realieji skaičiai, tenkinantys lygybę $x^3+y^3=2xy$. Įrodykite, kad $x<\sqrt[3]{4}$ ir $y<\sqrt[3]{4}$.

9. Skaičių a ir b porą $(a;\,b)$ vienu ėjimu galima pakeisti viena iš porų: $(a+1;\,b-2)$, $(a-2;\,b+1)$, $(a-1;\,b+2)$. Ar tokiais ėjimais iš poros $(13,17)$ galima gauti porą $(8,18)$?

10. Tegu N yra pirmųjų n pirminių skaičių $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ sandauga. Įrodykite, kad $N+1$ nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas.