



**PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ  
SEPTINTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA  
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO  
TAUREI LAIMĖTI**

**Pasvalys, 2005 m. lapkričio mėn. 25 d.  
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

**IX–X klasių uždaviniai**

1. Tegu  $ABC$  yra statusis trikampis, kuriame  $\angle BAC = 15^\circ$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ . Įrodykite, kad

$$AC \cdot BC = \frac{1}{4} AB^2.$$

2. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi  $n$  suma  $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$  dalijasi iš 9.

3. Tegu  $a_1, a_2, \dots, a_n$  yra teigiami skaičiai, kurių sandauga lygi 1. Įrodykite, kad

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

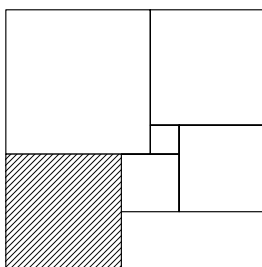
4. Jonas už gerą pažymį (sakykime, 8) gavo  $n$  dviejų litų monetų. Petras už geresnį pažymį gavo mažiausią sumą, didesnę už  $2n$  litų, kurią galima sumokėti 5 Lt monetomis. Už geriausią pažymį Povilas gavo mažiausią sumą, didesnę už Petro, kurią galima sumokėti 10 Lt banknotais. Koks didžiausias skirtumas galėtų būti tarp Povilo ir Jono gautų pinigų?

5. 175 obuoliai yra sudėti į kelias lygias krūveles. Dviejų krūvelių obuolius išskirsčius į likusias krūveles, jose prisidėtų po 10 obuolių. Raskite krūvelių skaičių.

6. Ar įmanoma surašyti skaičius 0 ir 1 į  $6 \times 6$  lentelę taip, kad visuose  $3 \times 3$  kvadratėliuose įrašytų skaičių sumos būtų skirtingos?

7. Yra dešimt atkarpų, kurių ilgiai nelyginiai sveikieji skaičiai, mažesni už 100. Įrodykite, kad iš kurių nors trijų atkarpų galima sudaryti trikampį.

8. Paveiksle pavaizduotą figūrą sudaro kvadratai. Paties mažiausio kvadrato kraštinės ilgis yra lygus 1. Raskite nuspalvinto kvadrato kraštinės ilgį.



9. Trapecijos pagrindų ilgiai yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad šią trapeciją galima suskaidyti lygiais trikampiais.

10. Su kuriais natūraliaisiais skaičiais  $n$ , priklausančiais intervalui  $[2000; 2005]$ , skaičius  $6,25 \cdot 10^n$  yra kurio nors sveikąjo skaičiaus ketvirtasis laipsnis?