PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ AŠTUNTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2006 m. lapkričio mėn. 24 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

U Ž D A V I N I A I
(Jaunesniųjų klasių grupė)

1. Sraigė plokštumoje iš taško A šliaužia pastoviu greičiu tiesės atkarpomis, kas 15 minučių 90° kampu keisdama judėjimo kryptį. Įrodykite, kad sraigė gali sugrįžti į pradinį tašką tik per sveiką valandų skaičių.

2. Nesinaudodami skaičiuokliu nustatykite, kuris skaičius didesnis:

$$\sqrt{2005}+\sqrt{2007} \quad \text{ar} \quad 2\sqrt{2006}\,.$$

3. Apskaičiuokite sumą

$$\frac{1}{2^{-100}+1}+\frac{1}{2^{-99}+1}+\ldots+\frac{1}{2^{0}+1}+\ldots+\frac{1}{2^{99}+1}+\frac{1}{2^{100}+1}\,.$$

4. Tris kvadratinius šokoladukus 3×3, 4×4 ir 5×5 reikia po lygiai padalyti penkiems žmonėms. Raskite minimalų perlaužimų skaičių. Šokoladas laužiamas tik per linijas.

5. Sveikieji skaičiai a, b, c ir d tenkina lygybę

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a+b}{c+d}\,.$$

Ar jų sandauga $abcd$ gali būti lygi 1000?

6. Ar galima iš trijų trikampių su kraštinėmis 3, 5 ir 7 ir vieno trikampio su kraštinėmis 2, 2, 2 sudaryti lygiakraštį trikampį?

7. Trys kalbininkai užsirašė po 100 žodžių, o paskui savo užrašus lygino tarpusavyje. Sutapus žodžiui nors dviejų kalbininkų sąrašuose, tą žodį išbraukdavo. Ar galėjo atsitikti taip, kad pirmojo kalbininko sąraše liko 54, antrojo – 75, o trečiojo – 80 neišbrauktų žodžių?

8. Ar galima ratu surašyti keturis vienetus, tris dvejetus ir tris trejetus taip, kad bet kurių trijų iš eilės einančių skaičių suma nesidalytų iš 3?

9. Natūralųjį skaičių galima dauginti iš 2 arba sukeisti jo skaitmenis vietomis (negalima tik rašyti nulio pirmoje pozicijoje). Ar šiais veiksmais galima iš 1 gauti 811?

10. Įrodykite, kad $\dfrac{a}{b+1}+\dfrac{b}{a+1}\geq 1$, jei $a,b>0$ ir $ab=1$.