PASVALIO KRAŠTO
15-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2013m. lapkričio 22d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Duota n sveikųjų skaičių. Įrodykite, kad tarp jų atsiras keletas (arba, gali būti, vienas) skaičių, kurių suma dalijasi iš n.

Įrodymas. Tegu $a_1, a_2, ..., a_n$ yra duotieji skaičiai. Sudarome sumas $a_1, a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3, ..., a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$. Arba bent viena iš šių sumų dalijasi iš n, kuri būtų ieškomoji, arba nė viena iš jų nesidalija iš n. Pastaruoju atveju atsiras dvi sumos, kurių dalybos liekanos iš n yra lygios, nes sumų yra n, o nenulinių liekanų yra $n-1$. Tokių sumų skirtumas $(a_1 + a_2 + ... + a_m) - (a_1 + a_2 + ... + a_k) = a_{k+1} + ... + a_m$ yra suma, dali iš n.

2. Raskite lygties $x^y + 1 = z$ pirminius sprendinius (pirminių skaičių x, y ir z trejetus, tenkinančius lygtį).

Sprendimas. Kadangi $x \geq 2$ ir $y \geq 2$, tai $z = x^y + 1 \geq 5$.

Skaičius $x^y + 1$ yra pirminis ir didesnis už 2. Todėl x^y yra lyginis, o kartu ir x yra lyginis. Vadinasi, $x = 2$. Jei būtų $y = 2k + 1$, tai

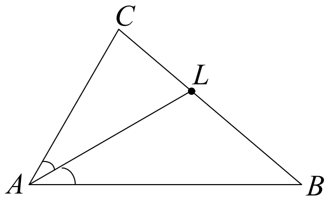
$$z = 2^{2k+1} + 1 = (2+1)(2^{2k} - 2^{2k-1} + ... + 1)$$

būtų dalus iš 3. Vadinasi, y irgi yra lyginis; taigi $y = 2$. Iš čia $z = 5$.

Ats.: $x = y = 2$, $z = 5$.

3. Įrodykite, kad trikampio ABC kampo A pusiaukampinė dalija kraštinę BC santykiu $AB : AC$.

Įrodymas. Tegu L yra kampo A pusiaukampinės susikirtimo taškas su kraštine BC. Taško L atstumai iki kraštinių AB ir AC yra lygūs: juos pažymėkime h. Tegu h_A yra trikampio ABC aukštinės iš viršūnės A ilgis. Tada trikampių plotai yra:



$$S_{ABL} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot h_A \cdot BL \quad \text{ir} \quad S_{ACL} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot h_A \cdot CL.$$

Dalydami randame, kad $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{CL}$.

4. Įrodykite, kad su bet kuriais nelygiais nuliui skaičiais x ir y

$$\frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} \geq x^4 + y^4.$$

Įrodymas. Nagrinėdami kairės ir dešinės pusės skirtumą, gauname:

$$\frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} - x^4 - y^4 = \frac{1}{x^2 y^2}(x^8 + y^8 - x^6 y^2 - x^2 y^6) = \frac{1}{x^2 y^2}(x^2 - y^2)(x^6 - y^6) \geq 0,$$

nes $x^2 - y^2$ ir $x^6 - y^6$ visada yra to paties ženklo.

5. Realiųjų skaičių a, b ir c trejetas tenkina lygybę

$$\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}=1.$$

Įrodykite, kad $|abc|\le\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Kada galioja lygybė?

Sprendimas. Padauginę lygybę iš sandaugos $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$, gauname lygybę

$$a^2(1+b^2)(1+c^2)+b^2(1+a^2)(1+c^2)+c^2(1+a^2)(1+b^2)=(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2).$$

Atlikę veiksmus, gauname lygybę

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2b^2c^2=1.$$

Toliau taikome aritmetinio vidurkio A_4 ir geometrinio vidurkio G_4 nelygybę $A_4\ge G_4$ ir gauname:

$$1=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2b^2c^2}{4}\cdot 4\ge 4\cdot\sqrt[4]{a^2b^2\cdot b^2c^2\cdot c^2a^2\cdot 2a^2b^2c^2}=4\cdot\sqrt[4]{2a^6b^6c^6},$$

$$4\cdot\sqrt[4]{2a^6b^6c^6}\le 1,$$

$$2a^6b^6c^6\le\frac{1}{256},$$

$$a^6b^6c^6\le\frac{1}{512}=\frac{1}{2^9},$$

$$|abc|\le\sqrt[6]{\frac{1}{2^9}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Lygybė $|abc|=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ galima tik tada, kai

$$a^2b^2=b^2c^2=c^2a^2=2a^2b^2c^2=\frac{1}{4}.$$

Iš čia gauname:

$$|a|=|b|=|c|=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ats.: $|a|=|b|=|c|=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

6. Natūraliojo skaičiaus n dalybos iš 2009 ir iš 2010 liekana lygi 35. Kokia yra skaičiaus n dalybos iš 42 liekana?

Sprendimas. Pagal sąlygą yra tokie sveiki neneigiami skaičiai k ir l, kad

$$n=2009k+35$$

ir

$$n=2010l+35.$$

Skaičius 2009 dalijasi iš 7, o skaičius 2010 dalijasi iš 6. Vadinasi, skaičius $2009k=2010l$ dalijasi ir iš 7, ir iš 6; taigi dalijasi iš $6\cdot 7=42.$ Todėl skaičiaus n dalybos iš 42 liekana lygi 35.

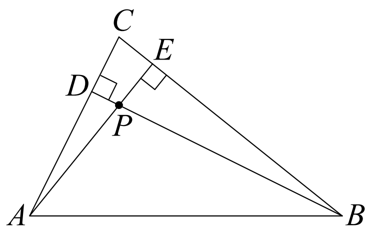
Ats.: 35.

7. Smailiojo trikampio ABC aukštinės BD ir AE susikerta taške P. Įrodykite, kad

$$AB^2 = AP\cdot AE + BP\cdot BD.$$

Įrodymas. Pažymėkime: $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$. Iš stačiųjų trikampių AEB ir ADB gauname: $AE = AB\sin\beta$, $BD = AB\sin\alpha$. Kadangi kampas $\angle ABP = 90^\circ - \alpha$, $\angle BAP = 90^\circ - \beta$, tai (iš $\Delta\, ABP$)

$$\angle APB = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta.$$



Tada pagal sinusų teoremą

$$AP = AB\cdot\frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} = AB\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

ir

$$BP = AB\cdot\frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = AB\cdot\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Todėl

$$AP\cdot AE + BP\cdot BD = AB\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot AB\sin\beta + AB\cdot\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot AB\sin\alpha =$$

$$= AB^2\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta + \cos\beta\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = AB^2\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = AB^2.$$

8. Tegu $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $n = 1, 2, 3, ...$ Raskite mažiausią natūralųjį skaičių x, didesnį už 2013, kad su kuriuo nors natūraliuoju skaičiumi m galiotų lygybė

$$T(x+1) - T(x) = T(m).$$

Įrodykite, kad jei $T(a) + T(b) = T(c)$ ir $a + b + c = T(28)$, tai $ab = 407(a + b - 203)$.

Įrodymas. Iš lygybės $T(x+1) - T(x) = T(m)$ gauname $\dfrac{(x+1)(x+2)}{2} - \dfrac{x(x+1)}{2} = T(m)$,

$$x + 1 = T(m) \ge 2015.$$

$$T(62) = 1957 < 2015,\ T(63) = 2016 > 2015,$$

tai $x + 1 = 2016 \Rightarrow x = 2015$. Spręsdami sistemą

$$\begin{cases} T(a) + T(b) = T(c), \\ a + b + c = T(28), \end{cases}$$

gauname:

$$\begin{cases} \dfrac{a(a+1)}{2} + \dfrac{b(b+1)}{2} = \dfrac{c(c+1)}{2}, \\ a + b + c = \dfrac{28\cdot 29}{2} = 406 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + a + b = c(c+1), \\ c = 406 - a - b. \end{cases}$$

Iš čia:

$$a^2 + b^2 + a + b = (406 - a - b)(407 - a - b),$$

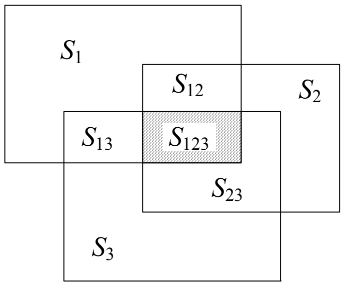
$$a^2 + b^2 + a + b = 406\cdot 407 - 813a - 813b + 2ab + a^2 + b^2,$$

$$2ab = 814a - 814b - 406\cdot 407,$$

$$ab = 407(a + b - 203).$$

9. Trijų kilimų bendras plotas lygus 200 m^2. Paklojus ant grindų, jie uždengė 140 m^2. Lygiai 24 m^2 plotas buvo uždengtas dviem sluoksniais. Koks grindų plotas uždengtas trimis sluoksniais?

Sprendimas. Kilimų plotus pažymėkime S_1, S_2 ir S_3. Dviem sluoksniais uždengtų grindų dalių plotus pažymėkime S_{12}, S_{13} ir S_{23}, o ieškomąjį plotą pažymėkime S_{123}. Pagal uždavinio sąlygą



$$S_1 + S_2 + S_3 = 200,\ \ S_{12} + S_{13} + S_{23} = 24$$

ir

$$(S_1 + S_2 + S_3) - (S_{12} + S_{13} + S_{23}) - 2S_{123} = 140.$$

Ats.: 18 m^2.

10. Prie to paties kelio taškuose A_1, A_2, ... , A_n stovi po vieną žmogų. Kuriame kelio taške jie turėtų susitikti, kad atstumų, kuriuos reikia kiekvienam iš jų nueiti iki susitikimo vietos, bendra suma būtų pati mažiausia? Išnagrinėkite du atvejus:

a) $n = 12$; b) $n = 21$.

Sprendimas. Tarkime, kad taškai A_1, A_2, ... , A_n prie kelio išsidėstę ta tvarka, kaip parašyta. Juos suporuokime taip: A_1 ir A_n, A_2 ir A_{n-1}, A_3 ir A_{n-2} ir t. t. Jei *n* būtų nelyginis skaičius, tai vidurinis taškas liktų vienas.

Nesunku suprasti, kad žmonių, esančių taškuose A_1 ir A_n, atžvilgiu susitikimo vieta galėtų būti bet kuriame taške M tarp A_1 ir A_n.

Analogiškai žmonių, esančių taškuose A_2 ir A_{n-1} atžvilgiu, susitikimo vieta galėtų būti bet kuris taškas M tarp A_2 ir A_{n-1}. Ir t. t.

Taip samprotaudami įsitikiname, kad visų žmonių susitikimo vieta priklauso nuo to, ar *n* yra lyginis skaičius, ar nelyginis. Jei $n = 2m$, tai susitikimo vieta galėtų būti bet kuris taškas tarp A_m ir A_{m+1}. Atveju $n = 2m - 1$ susitikimo vieta turėtų būti vidurinis taškas A_m.

Ats.: kai $n = 12$, tai turėtų susitikti bet kuriame taške tarp A_6 ir A_7 (tinka ir taškai A_6 bei A_7); kai $n = 21$, tai turėtų susitikti taške A_{11}.