PASVALIO KRAŠTO
15-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2013 m. lapkričio 22d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Įrodykite, kad sveikieji skaičiai x ir y dalijasi iš 3, jei $x^2 + y^2$ dalijasi iš 3.

Įrodymas. Tegu $x = 3a + r_1$ ir $y = 3b + r_2$; čia r_1 ir r_2 yra liekanos dalijant iš 3, kurių galimos reikšmės yra skaičiai 0, 1, –1.

Tada

$$x^2 + y^2 = 3(3a^2 + 3b^2 + 2ar_1 + 2br_2) + r_1^2 + r_2^2.$$

Jei $x^2 + y^2$ dalijasi iš 3, tai ir $r_1^2 + r_2^2$ dalijasi iš 3. Vadinasi, $r_1^2 + r_2^2 = 0$. Todėl $r_1 = r_2 = 0$.

2. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{n^2+3n}\right) < 3.$$

Įrodymas. Sandaugos dauginamuosius pertvarkykime taip:

$$1+\frac{2}{k^2+3k} = \frac{k^2+3k+2}{k^2+3k} = \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

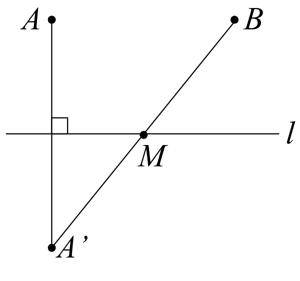
Vadinasi,

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{n^2+3n}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)} = \frac{\dfrac{(n+1)!(n+2)!}{2}}{\dfrac{n!(n+3)!}{6}} = 3\frac{n+1}{n+3} < 3$$

su visais natūraliaisiais n.

3. Tegu taškai A ir B yra vienoje tiesės l pusėje. Tiesėje l raskite tašką M tokį, kad atstumų suma $AM + MB$ būtų mažiausia.



Sprendimas. Tegu A' yra simetriškas atžvilgiu tiesės l taškui A. Akivaizdu, kad

$$AM + MB = A'M + MB,$$

o pastaroji suma bus mažiausia, kai M yra atkarpos $A'B$ susikirtimo su tiese l taškas.

4. Natūralieji skaičiai 1, 2, 3, ... iš eilės surašomi į begalinę lentelę (žr. pav.). Kiekvienam lentelės langeliui priskiriama skaičių pora $(m; n)$; čia m yra langelio pozicijos į dešinę numeris, o n – jo pozicijos į viršų numeris. Porą $(m; n)$ vadinkime langelyje parašyto skaičiaus koordinatėmis.

37	...	...	...	...	...	...
36	35	34	33	32	31	...
17	18	19	20	21	30	...
16	15	14	13	22	29	...
5	6	7	12	23	28	...
4	3	8	11	24	27	...
1	2	9	10	25	26	...

a) Imant kas antrą apatinės eilės langelį gaunama skaičių seka 1; 9; 25; ... Koks yra 100-asis tos sekos narys?

b) Koks skaičius yra langelyje (20; 20)?

c) Kokios langelio, kuriame yra skaičius 2013, koordinatės?

Sprendimas. a) Langeliuose, kurių koordinatės (1; 1), (3; 1), (5; 1), (7; 1). ..., $(2k-1; 1)$, ..., yra tokie skaičiai:

$$1=1^2,\ 9=3^2,\ 25=5^2,\ 49=7^2,\ \dots,\ (2k-1)^2,\ \dots .$$

Kadangi 100-asis sekos narys yra langelyje (199; 1), tai jis yra 199^2.

b) Langelyje (19; 1) yra skaičius $19^2=361$, o langelyje (20; 1) yra skaičius 362. Vadinai, langelyje (20; 20) yra skaičius $362+19=381$.

c) Kadangi $45^2=2025$, tai langelyje (45; 1) yra skaičius 2025. Kylant 45-uoju stulpeliu skaičiai mažėja (iki langelio (45; 45)). Taigi langelyje (45; 2) yra skaičius 2024, langelyje (45; 3) – skaičius 2023 ir t. t. Skaičius 2013 yra langelyje (45; 1+12) = (45; 13).

Ats.: a) $199^2=39601$; b) 381; c) (45; 13).

5. Kiek yra tokių keturženklių skaičių $\overline{x12y}$, kad sandauga $\overline{2xx}\cdot\overline{3y5}$ dalytųsi iš 12?

Sprendimas. Pažymėkime $a=\overline{2xx}\cdot\overline{3y5}$. Kadangi $\overline{2xx}=200+11x$, $\overline{3y5}=305+10y=$ $=5(61+2y)$, tai

$$a=5(200+11x)(61+2y).$$

Skaičius $61+2y$ yra nelyginis, todėl skaičius $200+11x$ turi dalytis iš 4. Vadinasi, x reikšmės gali būti tik 4 arba 8. Todėl

$$a=5\cdot 244(61+2y)=5\cdot 4\cdot 61(61+2y)$$

arba

$$a=5\cdot 288(61+2y)=5\cdot 12\cdot 241(61+2y).$$

Pirmuoju atveju a dalijasi iš 12 tik tada, kai $61+2y$ dalijasi iš 3. Galimos y reikšmės yra 1, 4 ir 7.

Antruoju atveju a dalijasi iš 12, kai y yra bet kuris skaitmuo.

Taigi gauname $3+10=13$ keturženklių skaičių $\overline{x12y}$, kurie tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: 13.

6. Skaičiaus 5632 ir natūraliojo skaičiaus x sandauga $5632x$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Raskite mažiausią x reikšmę.

Sprendimas. Kadangi $5632 = 2^9 \cdot 11,$ tai $x = 2 \cdot 11 = 22.$ Tada

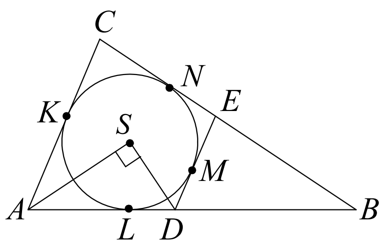
$$5632x = 2^{10} \cdot 11^2 = (2^5 \cdot 11)^2 = 352^2.$$

Ats.: 22.

7. Tegu S yra įbrėžto į trikampį ABC apskritimo centras, D – kraštinės AB vidurio taškas ir $\angle ASD = 90^\circ.$ Įrodykite, kad $AB + BC = 3AC.$

Įrodymas. Nubrėžkime AS, DS ir liestinę DE. Apskritimo lietimosi su DE ir ΔABC kraštinėmis taškus pažymėkime M, N, K, L.

Kadangi $\angle ADE + \angle DAC = 2\angle ADS + 2\angle DAS = 2(\angle ADS + \angle DAS) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$, tai $DE \parallel AC$.



Pagal sąlygą $AD = DB$. Todėl DE yra trikampio ABC vidurio linija; $DE = \frac{1}{2}AC.$ Be to, $AB = 2AD$ ir $BC = 2CE$.

Pagal liestinės savybę

$AL = AK$, $CK = CN$, $EN = EM$, $DL = DM$.

Iš čia $AD + CE = AC + DE = \frac{3}{2}AC.$ Vadinasi,

$$AB + BC = 2(AD + CE) = 3AC.$$

8. Natūralieji skaičiai x, y ir w tenkina lygybę

$$\frac{97}{19} = w + \frac{1}{x + \frac{1}{y}}.$$

Apskaičiuokite sumą $x + y + w.$

Sprendimas. Lygybę pertvarkykime taip:

$$5 + \frac{2}{19} = w + \frac{y}{xy+1},$$

$$5 = w + \frac{y}{xy+1} - \frac{2}{19}.$$

Aišku, kad

$$0 < \frac{y}{xy+1} \le \frac{y}{y+1} < 1,$$

todėl turi galioti lygybė $\frac{y}{xy+1} = \frac{2}{19}$. Iš čia

$$\begin{cases} y = 2k, \\ xy + 1 = 19k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2k, \\ x = \dfrac{19k-1}{2k} = 9 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2k}. \end{cases}$$

Vadinasi, $k = 1,$ $x = 9,$ $y = 2,$ $w = 5.$ Todėl $x + y + 10 = 9 + 2 + 5 = 16.$

Ats.: 16.

9. Du laivai (200 metrų ilgio ir 100 metrų ilgio) plaukia pastoviais, bet skirtingais greičiais. Plaukdami vienas prieš kitą, jie prasilenkia per 10 sekundžių. O kai abu plaukia ta pačia kryptimi, greitesnis laivas praplaukia pro lėtesnįjį per 25 sekundes. Koks greitesniojo laivo greitis?

Sprendimas. Tegu v_1 ir v_2 yra laivų greičiai (metrais per sekundę) ir $v_1 > v_2$. Pagal uždavinio sąlygą galioja dvi lygybės:

$$10v_1 = 300 - 10v_2 \ \text{ir} \ 25v_1 = 300 + 25v_2.$$

Gauname sistemą:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 30, \\ v_1 - v_2 = 12. \end{cases}$$

Iš čia $v_1 = 21$.

Ats.: 21 m/s.

10. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 2, \\ \dfrac{xz}{x+z} = 3, \\ \dfrac{yz}{y+z} = 4. \end{cases}$$

Sprendimas. Kadangi $x \neq 0$, $y \neq 0$ ir $z \neq 0$, tai sistemą galima pertvarkyti taip:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Iš pirmųjų lygčių gauname, kad

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{3} - \frac{1}{x}.$$

Įrašę į trečią lygtį, gauname:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4},$$

$$-\frac{2}{x} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$x = \frac{24}{7}.$$

Belieka apskaičiuoti y ir z. Gausime $y = \dfrac{24}{5}$, $z = 24$.

Ats.: $\left(\dfrac{24}{7}; \dfrac{24}{5}; 24\right)$.