Organizuoja

VILNIAUS UNIVERSITETAS

REMIA

UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS
LEIDYKLA TEV
LEIDYKLA TYTO ALBA
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

XXVI LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Konkurso dalyvius sveikina Maria Falk de Losada,
Pasaulinės nacionalinių matematikos varžybų federacijos Prezidentė

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas

2011 09 24

1. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3, \\ x_2 + x_3 = -2, \\ x_3 + x_4 = -1, \\ x_4 + x_5 = 0, \\ x_5 + x_6 = 1, \\ x_6 + x_7 = 2, \\ x_7 + x_1 = 3. \end{cases}$$

2. Įrodykite, kad $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$, kai $a, b, c > 0$.

3. Įrodykite, kad jei $a, b, c > 0$ ir $a + b + c = abc$, tai

$$a^5(bc-1) + b^5(ca-1) + c^5(ab-1) \geq 54\sqrt{3}.$$

4. Jeigu $0 \leq a, b, c \leq 1$, tai kokia yra didžiausia reiškinio

$$a + b + c - ab - ac - bc$$

reikšmė?

5. Įrodykite, kad bet kokiems realiesiems skaičiams a, b, c galioja nelygybė

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a).$$

6. Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius n, kad $n^2 - 7n + 10$ dalijasi iš n – 3.

7. (A) Skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir 10 suskirstyti poromis ir apskaičiuotos visos penkios kiekvienos poros skaičių sumos. Ar galima tokiu būdu gauti penkis skirtingus pirminius skaičius?
(B) Skaičiai 1, 2, 3, ..., 18, 19 ir 20 suskirstyti poromis ir apskaičiuotos visos dešimt kiekvienos poros skaičių sumų. Ar galima tokiu būdu gauti dešimt skirtingų pirminių skaičių?

8.Raskite visas tokias natūraliųjų skaičių poras (p, q), kad $p > q$ ir $\frac{p+1}{p} \cdot \frac{q+1}{q} = \frac{2011}{2010}$.

9. Raskite visas tokias sveikųjų skaičių poras (x, y), kad $x^2(y-1)+y^2(x-1)=1$.

10. Natūralieji skaičiai $a_1 < a_2 < ... < a_n$ pasižymi savybe, kad su bet kuriais skirtingais indeksais *i* ir *j* skaičius a_i dalijasi iš $|a_j - a_i|$. Įrodykite, kad su visais indeksais $i < j$ galioja

$$ia_j \le ja_i.$$

11. Dėžėje buvo 255 rutuliai, sunumeruoti skaičiais 1, 2, 3, …, 255. *N* moksleivių priėjo prie tos dėžės ir pasiėmė iš jos kiekvienas po vieną rutulį. Pasirodė, kad nė vienas iš paimtų rutulių numerių nebuvo lygiai du kartus didesnis už bet kurio kito paimtojo rutulio numerį. Nustatykite didžiausią *N* reikšmę.

12. Salėje yra $2n+1$ žmogus (*n* yra natūralusis skaičius). Bet kurie du žmonės arba pažįsta vienas kitą, arba ne. Bet kurie *n* žmonių, esantys salėje, turi bendrą pažįstamą tarp likusiųjų. Ar gali kiekvienas salėje esantis žmogus nepažinoti bent vieno kito salėje esančio žmogaus? Kodėl?

13. Kairiajame apatiniame 7×7 lentos langelyje stovi šaškė. Du žaidėjai, Edvardas ir Benas, pakaitomis kelia ją į kaimyninį pagal kraštinę langelį; pradeda Edvardas. Pralaimi tas žaidėjas, kuris perkelia šaškę į tokį langelį, kuriame šaškė jau yra buvusi. Kuris žaidėjas gali žaisti taip, kad visada laimėtų, ką bedarytų kitas žaidėjas? Atsakymą pagrįskite.

14. Greta su Elena ištisą pusvalandį šnekučiavosi, ar įmanomas toks ledo ritulio daugiau nei 5 komandų turnyras, kuriame kiekviena komanda sužaistų po vieną kartą su kiekviena kita komanda ir visos komandos turnyro pabaigoje surinktų skirtingą taškų skaičių. Be to, reikia, kad paskutinę vietą tame turnyre užėmusi komanda laimėtų ne mažiau kaip 25% žaistų rungtynių, o antrą vietą užėmusi komanda – ne daugiau kaip 40%. Galop gudruolės užpildė šiuos reikalavimus atitinkančią turnyrinę lentelę. Raskite ją ir jūs. (Ledo ritulio turnyruose už pergalę komandai skiriami 2 taškai, už lygiąsias – po vieną tašką, o už pralaimėtas rungtynes įskaitoma 0 taškų.)

15. Kiekvienas lentos 1000×1000 langelis nudažomas baltai arba juodai. Baltų ir juodų langelių skaičiaus skirtumas yra 2012. Įrodykite, kad atsiras 2×2 kvadratas su nelyginiu baltų langelių skaičiumi.

16. Ar gali trikampio ir keturkampio sankirta būti aštuoniakampis?

17. *AD* ir *BE* yra smailiojo trikampio ΔABC aukštinės. Jei $AE = 5$, $CE = 3$ ir $CD = 2$, tai koks yra atkarpos *BD* ilgis?

18. Duotas lygiašonis trikampis *ABC* ($AC = BC$). Taškas *P* priklauso tam apie trikampį *ABC* apibrėžto apskritimo lankui CA, kuriame nėra taško *B*. Taškai *E* ir *F* yra taško *C* projekcijos atitinkamai tiesėse *AP* ir *BP*. Įrodykite, kad $AE = BF$.

19. Trikampio ΔABC viduje atsirado toks taškas *P*, kad $AP = \sqrt{3}$, $BP = 5$, $CP = 2$, $AB : AC = 2 : 1$, $\angle BAC = 60°$. Koks yra trikampio ΔABC plotas?

20. Duotas trikampis *ABC*, kuriame $AB = AC$. *D* yra kraštinės *BC* vidurio taškas, o *E* yra toks trikampio *ABC* išorės taškas, kad $CE \perp AB$ ir $BE = BD$. *M* yra atkarpos *BE* vidurio taškas. *F* yra toks apie trikampį *ABD* apibrėžto apskritimo mažesniojo lanko *AD* taškas, kad $MF \perp BE$. Įrodykite, kad $ED \perp FD$.