

Organizuoja
Vilniaus universitetas

Remia
UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TYTO ALBA,
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XV LIETUVOS 5–6 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ
MATEMATIKOS OLIMPIADA
Konkurso dalyvius sveikina
Roza LEIKIN,
Tarptautinės gabiųjų ugdymo ir kūrybingojo mokymo
Asociacijos prezidentė
Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2013 09 28

1. Kurmio Karolio teta Kas(t)ė Rausytė nuo jaunų dienų tiki į dviženklių skaičių harmoniją. Ji labai vertina visus tokius dviženklus skaičius ir laiko, kad jie yra *teisingai išminčių sugalvoti*, jeigu tą dviženklį skaičių galima gauti prie kažkokio (mažesnio) dviženklio skaičius pridėjus abudu to kažkokio (mažesnio) skaičius skaitmenis. Pavyzdžiui, skaičius 25 yra *teisingai išminčių sugalvotas*, nes yra toks dviženklis (mažesnis) skaičius 17, prie kurio pridėjus abudu to skaičiaus 17 skaitmenis 1 ir 7, tikrai ir gaunami tie 25: $17 + 1 + 7 = 25$. Visus likusius dviženklus skaičius teta Kas(t)ė vadina *skersais dviženkliais* skaičiais.

Jau kuris laikas teta Kas(t)ė visus aplinkinius gudruolius siaubia klausimu, koks gi yra pats didžiausias *skersas dviženklis* skaičius?

Teta Kas(t)ė ne tik klausia, bet ir prašo paaiškinti, kodėl taip yra?

2. Kurmis Murmis ir Ežys Kežys labai susidraugavo, kai jie pusantros savaitės grūmėsi su tokiu uždaviniu, apie kurį Barsukė Narsukė patempusi ūsą dūsavo, kad čia ne užsikasusių kurmių ir pievoje plevenančių drugelių reikalai. Nors pats tas uždavinys, arba, kaip ji sakė, uždaviniūkštis buvo tik lentelės 5×5 „pripurškimas“ skaičiais – griežtai ir aiškiai įrašant po vieną skaičių į kiekvieną langelį. Buvo griežtai reikalaujama, kad ir pirmoje, ir antroje eilutėje būtų po kartą įrašyti visi skaičiai 1, 2, 3, 4 ir 5, kad ir trečioje, ir ketvirtoje eilutėje būtų po kartą įrašyti visi skaičiai 3, 4, 5, 6 ir 7, o pačioje paskutinėje penktoje eilutėje turėjo po kartą būti įrašyti visi skaičiai 4, 5, 6, 7 ir 8.

Taip užpildžius lentelę - eilutės po eilutės – būdavo suskaičiuojama visų 5 stulpelių skaičių sumos ir jeigu pasirodydavo, kad jos visos yra lygios, tai toks lentelės užpildymas būdavo vadinamas *finansiskai stabilium*.

Rašė braukė skaičius pamažu kurmis su ežiu, palindę į šešėlį po kaimyno garažu, ir pirmą dieną nelabai ką teišpaudė, atvirai sakant, grįžo jie namo taip tos lentelės finansiskai stabiliai ir neužpildę. Tai jie yra žvėriukai, iš jų nėra kaip to *finansiskai stabiliaus* lentelės užpildymo ir reikalauti – o kaip Jums, ar Jums pavyktų *finansiskai stabiliai* užpildyti tą 5×5 lentelę sveikaisiais skaičiais taip, kad ir pirmoje, ir antroje eilutėje būtų surašyti visi sveikieji skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, ir trečioje, ir ketvirtoje eilutėje būtų surašyti visi sveikieji skaičiai 3, 4, 5, 6, 7, o penktoje eilutėje būtų surašyti visi skaičiai 4, 5, 6, 7, 8 ir visų stulpelių skaičių sumos būtų visos vienodos.

Jeigu Jums pavyks *finansiskai stabiliai* užpildyti lentelę, tai parodykite ir mums, kaip tai daroma?

3. Barsukas Graužtukas rado ant pliauskos išpjaustytą triženklį skaičių ir kadangi jam, kaip visada, niežtėjo dantys, tai jis net pats nepastebėjo kaip ėmė ir nugraužė vidurinę to skaičiaus skaitmenį. Prisiartinęs kurmis Karolis berado dviženklį skaičių, kuris jau buvo 12 kartų mažesnis už pradinį barsuko Graužtuko dar nepagraužtą skaičių. Jie ėmė svarstyti, ar dar yra tokių skaičių

ir net išsismaginę ėmėsi samprotauti, kiek tokių skaičių apskritai esama. Padėkite jiems, nes barsukai pagal jų Švietimo programas dirbti su dviženkliais bei triženkliais skaičiais gali tik išimties tvarka ir tai tik su abiejų tėvų leidimu.

(A) Suraskite jiems vieną tokį skaičių ir paaiškinkite, kodėl jis tinka;

(B) Jei jau radote vieną tokį skaičių, tai gal surastumėte dar ir kitą;

(C) Jeigu jau radote vieną tokį skaičių, ar net ir kitą, tai gal padėtumėte jiems surasti ir visus tokius skaičius ir gal net įtikintumėte (mus ir juos), kad daugiau tokių skaičių tikrai nėra.

4. Barsuko Graužtuko kieme yra toks kvadratas 4×4 , kurio langelius galima nuspalvinti – tai su malonumu ir labai spėriai atlieka robotas, vardu Barbotas, visur žinomas kaip *tiesiog Bobas*. Nuspalvinęs jau kaip jam šaus į galvą viena kuria spalva kokį nors tos lentelės langelį *tiesiog Bobas*, baigdamas darbą, t.y. nuspalvinęs kažkiek tos lentelės langelių, visada rūpestingai ir be klaidų suskaičiuoja, kiek langelių jis iš viso nuspalvino kiekvienoje tos lentelės eilutėje ir kiek langelių jis nuspalvino kiekviename tos lentelės stulpelyje. Tuos be klaidų atliktus skaičiavimų rezultatus *tiesiog Bobas* užrašo atskirai prie kiekvienos eilutės ir taip pat atskirai po kiekvienu stulpeliu. Barsukas Graužtukas labai didžiuojasi tuo savo niekada neklystančiu skaičiuojant nuspalvintus kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio langelius *tiesiog Bobu*. Vakar Barsuko Graužtuko svečiai po beržų graužimo sėdę ant kranto ką tik išvarvėjusios sulos paragauti rado tokią *tiesiog Bobo* po eilinio dažymo atliktą statistiką (pačios lentelės langeliai delikaliai pridengti marška):

				2
				0
				1
				1
2	0	1	1	

Kadangi šį kartą Barsuko Graužtuko svečiai tikrai niekur neskubėjo, todėl svetingas šeimininkas pirmiausiai paklausė:

(a) ar pagal *tokią tiesiog Bobo* atliktą eilučių ir stulpelių nuspalvinimo statistiką tikrai įmanomas toks kai kurių lentelės langelių nuspalvinimas?

(b) jei toks kai kurių lentelės langelių nuspalvinimas įmanomas, tai kiek jų yra iš viso? Nupieškite visus tokius nuspalvinimo būdus.

Taigi (a) atveju atsakymas yra „taip“ arba „ne“ paaiškinant kodėl „taip“, arba kodėl „ne“; o jeigu „taip“ – tai tada ir „konkrečiai kiek“?

5. Barsukas Karolis liko sužavėtas tokia perskaityta žmogiškąja *fantazy* istorija apie senelę Gertrūdą ir jos septynias triufelių lėkštutes, kiekvienoje iš kurių buvo po skirtingą triufelių skaičių.

Senelės Gertrūdos *žavusis skaitinis stebuklas* buvo tas, kad ji galėdavo nuimti kokią nori iš tų 7 lėkštučių, o visus jos triufelius išbarstyti po likusias 6 lėkštutes taip, kad kiekvienoje iš tų likusių 6 lėkštučių triufelių pasidaro po lygiai.

Tas senelės Gertrūdos *žavusis skaitinis stebuklas* Barsuką Karolį užbūrė taip smarkiai, kad jis net nepajuto, kaip griebė popieriaus skiautę ir ėmė rašinėti ieškodamas, su kokiu pačiu mažiausiu triufelių skaičiumi pačioje daugiausiai triufelių turinčioje lėkštutėje senelei Gertrūdai visada pavyks jos *žavusis skaitinis stebuklas*.

Paaiškinkite mums, kaip čia bus, nes mes čia kol kas nieko nesuprantame.