

Organizuoja  
Vilniaus universitetas

Remia  
UAB „AFFECTO LIETUVA“  
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,  
Leidykla TYTO ALBA,  
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,  
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLĄ

## XIV LIETUVOS 7-8 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Konkurso dalyvius sveikina  
Tarptautinės kūrybingumo ir gabiųjų ugdymo asociacijos Prezidentė  
Roza Leikin

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2011 09 29

1. Genelis Baltrus, kuris pats yra didis paukščių profsajungų aktyvistas ir, ko čia slėpti, paties Atamano Šarkos rinkimų patikėtinis ir asmeninis patarėjas, baigęs pamainą labai mėgsta sausoje pušyje dar pakalinėti kokią sudėtį stulpeliu ar dalybą kampu. Pastaruoju metu kaip kokia epidemija Juokų miške paplito skaičių dvigubinimas. Štai ir vakar prieš skrisdamas namo Grainio liepoje Genelis Baltrus dar susirado triženklį skaičių, kuris buvo, žinoma, be nulinių (nuo nulinių skaitmenų Genelis Baltrus čiaudėja), padvigubino jį ir lengviau atsiduso pamatęs, kad ir padvigubintame skaičiuje nulinių skaitmenų nėra. Ir pradėjo jis galvoti, kiek daugiausiai kartų taip dvigubinant gali sumažėti dvigubinamojo skaičiaus skaitmenų sandauga. (O kad nuo dvigubinimo triženklis skaičiaus skaitmenų sandauga gali sumažėti Genelis Baltrus įsitikino žiūrėdamas į pavyzdį:  $661 \cdot 2 = 1322$ ).

Kitaip sakant, genelis Baltrus turi “sukalti” tokį uždavinį. Triženklis skaičius be nulinių skaitmenų buvo padvigubintas ir nulinių skaitmenų padvigubintame skaičiuje vėl nėra. Kiek daugiausiai kartų po vieno tokio padvigubinimo gali sumažėti triženklis skaičiaus skaitmenų sandauga?

2. Šarkų, kėkštų ir blezdingų profiliuotoje dailiųjų amatų mokykloje, kur nuo šimtmečių sustiprintai visada buvo dėstoma aritmetika bei puošniųjų akmenukų kainų svirduliavimai, per baigiamąjį kontrolinį šiais metais, tiesa, ne visiems, o tik giliau į aritmetiką įsikertantiesiems, buvo labai rekomenduojamas toks laisvai pasirenkamas privalomas uždavinys, susidedantis iš dviejų dalių.

Pirmojoje dalyje reikėjo užrašyti kokį nors vieną 100-ženklį skaičių, kurio įprastiniame dešimtainiame užrašė terandame – o kokia nuobodybė – tik nulius ir vienetus, o pats skaičius be liekanos, gražiai turi pasidalinti į 12 lygių dalių.

Antrojoje dalyje jau be jokių užuolankų buvo klausinėjama bei reikalaujama surasti jau nebe bet kokį, o jau patį mažiausią iš visų tokių 100-ženklių skaičių.

3. Erelis Hamletas kartą buvo savo palikuonio Ernesto paklaustas, kaip jis ryžosi visą gyvenimą nebepalikti tos užburiančios erdvių tolybės. Staiga surimtėjęs erelis Hamletas jam pasisakė galutinai apsisprendęs po vieno tokio ankstyvojoje vaikystėje regėto žvalaus sapno, kuriame lakštingalų choras iš pradžių “apšilimui” vis plėšė priegiesmį apie tai, kad ir dangiškoji trapecija yra va toks keturkampis, kuris lieka, kai nuo trikampio lygiagrečiai vienai kuriai nors jo kraštinei “nurėžiamo” priešgulę jai

viršūnę. Po to lakštingalų choras suskėlė ir pačią oratoriją, kurios paskutinė arija baigėsi žodžiais: “Ar žinai, ar žinai, ką čia sakė milžinai?”, o tikslus matematinis viso konkretaus oratorijos turinio aprašas pateikiamas žemiau ir yra toks:

Trapecijos  $ABCD$  vienos šoninės kraštinės  $CD$  ilgis yra lygus abiejų (lygiagrečių) jos pagrindų  $AD$  ir  $BC$  ilgių sumai, o kitos tos trapecijos šoninės kraštinės  $AB$  vidurio taškas yra  $M$ . Raskite kampo  $CMD$  didumą laipsniais.

Sužinokite ir Jūs, ką čia sakė milžinai, arba koks yra kampo  $CMD$  didumas laipsniais?

**4.** Genelis Baltrus savo sūnų Balį moko kantriai spėlioti viską, ką tik įmanoma, pavyzdžiui, visokiausius natūraliuosius (sveikuosius teigiamus) lygčių sprendinius.

Genelis Baltrus savo sūnui visą savaitę kalė į galvą mintį, kad turint lygtį  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{19}{94}$ ,

kur  $m$  ir  $n$  yra natūralieji skaičiai, be didesnio vargo, beveik vien tik spėliojant, galima:

(A) per 33 minutes net ir be jokių didelių teorijų atspėti vieną tokią natūraliųjų skaičių porą  $(m; n)$  porą, tinkančią tai lygčiai;

(B) atspėjus vieną porą, per minutę galima nurodyti ir antrą tokią tinkamą porą.

(C) toliau genelis Baltrus tiesiai paklausė sūnų Balį, kiek iš viso yra tokių porų?

**5.** Atamanas Šarka ir 5 netolimi jo giminaičiai Šarkonis, Šarkėla, Šarkūnas, Šarkūnijas ir Šarkauckas treniruoja kiekvienas po savo futbolo komandą. Vieno šlovingo tos giminės susiskridimo proga įvyko ir visų tų 6 komandų turnyras, kur kiekviena komanda, suprantama, sužaidė po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda. Šarkūniniuose turnyruose, kaip ir visuose elitiniuose turnyruose, už laimėtas rungtynes komandai visada skiriami 3 taškai, už lygiąsias – 1 taškas, o už pralaimėtas rungtynes komanda gauna 0 taškų. Pasibaigus turnyrui pasirodė, kad visos jame dalyvavusios komandos surinko po skirtingą taškų skaičių, o pirmąją vietą, kaip jūs turbūt jau visi nujaučiate, užėmė paties atamano treniruojama komanda, surinkusi vos 5 taškais daugiau už pačioje paskutinėje vietoje likusią komandą – tokios retos harmonijos buvo tas turnyras.

Bet ar tikrai taip galėjo būti?

Kiek taškų tada galėjo sukaupti pirmoji ir kiek jų sukaupė paskutinioji to dabar jau aiškiai legendinio turnyro komanda.

Ir jeigu jau taip tikrai galėjo būti, tai tada pateikite mums galimą to turnyro lentelę, kurioje viską ir surašykite, nurodydami kas su kuo ir kaip sužaidė.

**6.** Atamano Šarkos pavedimu doktorantas Apuokas su savo magistrantais kėkštais ir bakalaurais žvirbliais absoliučiai – neįtikėtina, bet be klaidų, įsidėmėkite, be klaidų – sudaugino visus sveikuosius skaičius nuo 1 iki 2012 ir, iš gautosios sandaugos atėmė 1, gautąjį skaičių užrašė plonoje ilgoje popieriaus juostelėje. Po to jie visi spoksodami į tą juostelę pradėjo ryžtingai galvoti, kiek mažiausiai skaitmenų tame ilgoje popieriaus juostelėje užrašytame skaičiuje gana būtų pakeisti nuliais, kad tas skaičius jau dalintųsi iš 13?

Atamanas Šarka ta proga pajuokavo kaip reta atvirai, kad išgirdo visas paukščių juokų slėnis, nors tą aforizmą visi jau ne sykį buvo girdėję: atamanas Šarka vėl pakartojo, kad padoriems paukščiams siūlomi uždaviniai būna dvejopi: paprasti arba įdomūs.