

ALYTAUS APSKRITIES XVI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Alytus, 2012 m. lapkričio 24 d.

UŽDAVINIAI

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + xy + x^2 = 9, \\ y + xy + y^2 = -3. \end{cases}$$

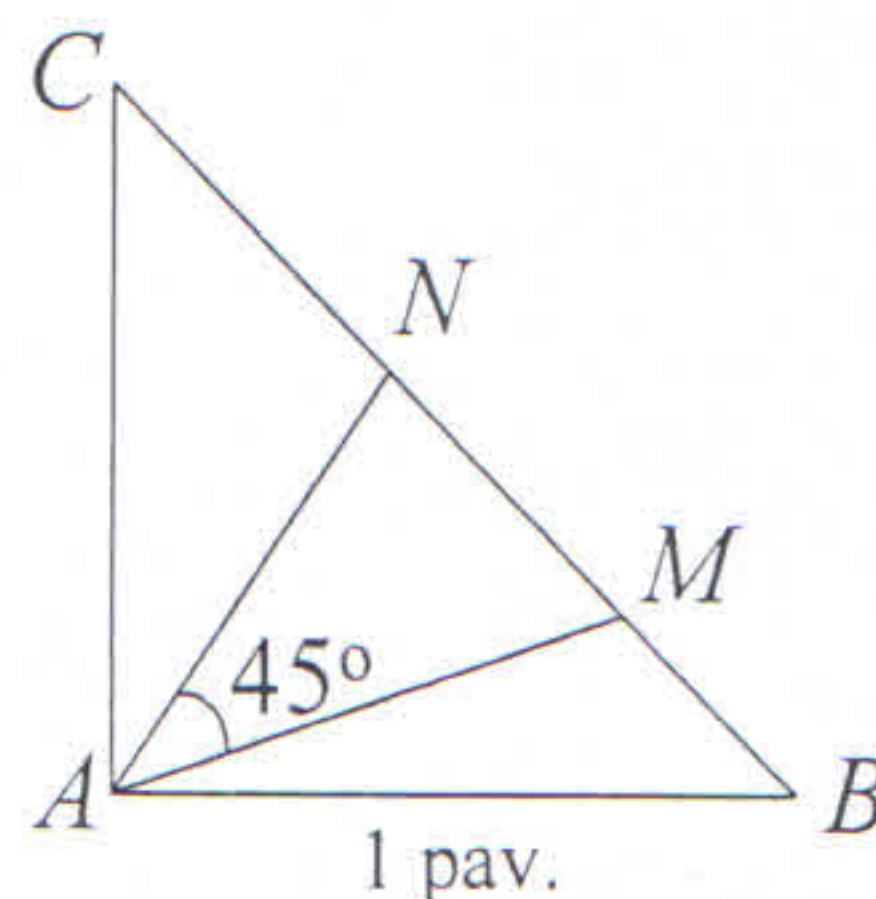
2. Raskite visus sveikųjų skaičių x , y ir z , kurių suma lygi 2012, trejetus $(x; y; z)$, tenkinančius lygybę

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(yz + 1).$$

3. Išspręskite lygtį

$$\frac{2x}{x^2 - x + 1} - \frac{7x}{x^2 + 5x + 1} = 1.$$

4. Lygiašonio stačiojo trikampio ABC įžambinėje BC pažymėti taškai M ir N (žr. 1 pav.) taip, kad $\angle MAN = 45^\circ$. Įrodykite, kad $MN^2 = BM^2 + NC^2$.



5. Skaičius a dalijasi iš 9; jį sudaro 2012 skaitmenų. Skaičius A yra skaičiaus a skaitmenų suma, skaičius B yra skaičiaus A skaitmenų suma, o C – skaičiaus B skaitmenų suma. Raskite skaičių C .
6. Nustatykite, kokių 6-ženklių skaičių yra daugiau – tokių, kuriuos galima užrašyti dviejų triženklių skaičių sandauga, ar tokių, kurių taip užrašyti neįmanoma.
7. Kvadratas $ABCD$ padalytas į 36 kvadratus. Vieno iš jų plotas nelygus vienetui, o kiekvieno kito plotas lygus vienetui. Raskite kvadrato $ABCD$ plotą.
8. Lentoje buvo parašyti du vienodi skaičiai. Augustinas prie vieno iš jų prirašė 100 iš kairės, o prie kito 1 iš dešinės. Pirmasis skaičius pasidarė 37 kartus didesnis už antrąjį. Kokie skaičiai galėjo būti parašyti lentoje?
9. (Senovinis uždavinys). Trys seserys atėjo į turgų su viščiukais. Viena atnešė parduoti 10 viščiukų, antra 16, trečia 26. Prieš pietus jos pardavė dalį savo viščiukų viena ir ta pačia kaina. Po pietų, bijodamos, kad ne visi viščiukai bus parduoti, jos sumažino kainą ir likusius viščiukus pardavė vėl vienoda kaina. Namo visos trys grįžo su vienodomis pajamomis: kiekviena sesuo už savo viščiukus gavo 35 rublius. Kokia kaina seserys pardavė viščiukus prieš pietus ir po pietų.
10. Išspręskite lygtį

$$(x+1)^4 + (x+3)^4 = 82.$$