9. VIRŠUTINĖ IR APATINĖ SEKOS RIBOS

Kartais atsitinka, kad seka neturi ribos, tačiau reikia nusakyti kai kurias sekos charakteristikas. Pvz.:

$$x_n = (-1)^n, n = 0,1,2,... \tag{9.1}$$

Akivaizdu, kad ši seka nekonverguoja. Taip pat žinome, kad ji turi du posekius

$$x_{2n} = (-1)^{2n} = \left[(-1)^2\right]^n = 1, n = 0,1,...,$$
$$x_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -(-1)^{2n} = -1, n = 0,1,...$$

kurie konverguoja atitinkamai į 1 ir -1. Šie du skaičiai vadinami dalinėmis sekos (9.1) ribomis. Galima pasakyti ir bendrą apibrėžimą

Apibrėžimas 9.1. Sekos $\{x_n\}$ konverguojančio posekio $\{x_{n_k}\}$ ribą vadiname sekos daline riba.

Pažymėkime sekos $\{x_n\}$ visų dalinių ribų aibę raide *E*. Sekos (9.1) dalinių ribų aibė $E = \{-1;1\}$.

Apibrėžimas 9.2. Didžiausiąją sekos $\{x_n\}$ dalinę ribą vadiname sekos viršutiniąja riba ir žymime

$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ arba $\limsup_{n\to\infty} x_n$. Skaitome *limes superior.*

Mažiausiąją dalinę ribą vadiname apatiniąja sekos riba ir žymime

$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ arba $\liminf_{n\to\infty} x_n$. Skaitome *limes inferior.*

Teiginys 9.1. Neaprėžta iš viršaus seka turi posekį, konverguojantį į $+\infty$.

Įrodymas. Nagrinėkime neaprėžtą iš viršaus seką $\{x_n\}$. Tai reiškia, kad

$$\forall M, \exists n, x_n > M. \tag{9.2}$$

Sukonstruosime posekį, kurio riba yra $+\infty$. Paimkime skaičių

$$M_1 = 1. \exists n_1, x_{n_1} > 1. \tag{9.3}$$

Apibrėžkime

$$M_2 = \max\{2, x_1, ..., x_{n_1}\} = \max_{k=1,...,n_1}\{2, x_k\}. \tag{9.4}$$

Tada $\exists n_2$, kad

$$x_{n_2} > M_2 \ge 2. \tag{9.5}$$

Iš (9.4) ir (9.5) išplaukia, kad $n_2 > n_1$. Sakykime, turime tokius $n_1 < n_2 < ... < n_k$, kad

$$x_{n_i} \ge i, i = 1,2,...,k. \tag{9.6}$$

Tada apibrėžkime

$$M_{k+1} = \max\{k+1, x_1, ..., x_{n_k}\} = \max_{l=1,...,n_k}\{k+1, x_l\}. \tag{9.7}$$

Remdamiesi (9.2) galime rasti n_{k+1}, kad

$$x_{n_{k+1}} > M_{k+1} \ge k+1. \tag{9.8}$$

Iš (9.7) ir (9.8) išplaukia, kad $n_{k+1} > n_k$. Iš pastarosios nelygybės taip pat išplaukia, kad

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty. \tag{9.9}$$

Įrodėme, kad neaprėžta iš viršaus seka turi posekį, konverguojantį į $+\infty$. Taigi $+\infty$ galime laikyti didžiausia sekos daline riba ir tada natūralu apibrėžti

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty.$$

Analogiškai galima įrodyti, kad neaprėžta iš apačios seka turi posekį, konverguojantį į $-\infty$, ir tada vėl natūralu laikyti

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Prisiminkime geometrinę progresiją su vardikliu $q > -1$. Pvz.:

$$q = -2, x_n = (-2)^n, n = 0,1,\dots.$$

Turėdami galvoje ankstesnius susitarimus, galime teigti, jog tokios sekos apatinė riba yra $-\infty$, o viršutinė $+\infty$. Jei seka aprėžta, tai galima įrodyti tokį teiginį.

Teiginys 9.2. Aprėžta seka turi didžiausią ir mažiausią dalines ribas.
Įrodymas. Susitarėme sekos $\{x_n\}$ dalinių ribų aibę žymėti *E*. Jei seka aprėžta, tai ir dalinių ribų aibė aprėžta. Tada ji turi tikslųjį viršutinį ir apatinį rėžius. Pažymėkime $c = \sup E.$ Įrodysime, kad skaičius *c* yra sekos didžiausia dalinė riba. Paimkime bet kokį $\varepsilon, \varepsilon > 0.$ Tada $c - \varepsilon$ nebus aibės *E* viršutiniu rėžiu. Todėl egzistuos toks aibės *E* elementas (sekos $\{x_n\}$ dalinė riba !) α, kad

$$c - \varepsilon < \alpha \le c < c + \varepsilon. \tag{9.10}$$

Egzistuoja sekos posekis, konverguojantis į α. Tada visi šio posekio nariai, pradedant kokiu nors *K*, t.y. be galo daug posekio (tuo pačiu ir sekos) narių, priklausys intervalui $(c-\varepsilon; c+\varepsilon)$. Dabar vietoje vieno ε reikia imti seką $\{\varepsilon_k\}$, artėjančią į nulį, pvz.: $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$. Kiekvienam *k* surasime sekos dalinę ribą α_k, tenkinančią sąlygą

$$c - \varepsilon_k < \alpha_k \le c < c + \varepsilon_k. \tag{9.11}$$

Dalinė riba α_k yra kažkokio posekio riba. Vadinasi, intervale $(c-\varepsilon_k; c+\varepsilon_k)$ yra visi šio posekio nariai, pradedant tam tikru. Galima paimti kokį nors posekio narį iš šio intervalo ir pažymėti x_{n_k}. Taigi gavome posekį $\{x_{n_k}\}$, tenkinantį sąlygą

$$c - \varepsilon_k < x_{n_k} < c + \varepsilon_k, \forall k. \tag{9.12}$$

Pasinaudoję dviejų policininkų principu, gauname, kad $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. Taigi *c* yra mūsų pradinės sekos dalinė riba.
Analogiškai galima įrodyti, kad $\inf E$ taip pat yra sekos $\{x_n\}$ dalinė riba.

Įsitikinome, kad egzistuoja didžiausioji dalinė riba. Tai reiškia, kad apibrėžimas 9.2 yra korektiškas. Galima gauti (tačiau to neįrodinėsime) išreikštines apatinės ir viršutinės ribų formules:

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} x_k = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\ge n} x_k\right), \tag{9.13}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} x_k = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\ge n} x_k\right). \tag{9.14}$$

Šiose formulėse rašydami skliaustelius norime pabrėžti, kad atliekamos dvi operacijos. Pirma surandamas supremumas (arba infimumas), o po to apskaičiuojama riba. Jei apibrėšime

$$b_n = \sup_{k\ge n} x_k, \tag{9.15}$$

$$a_n = \inf_{k\ge n} x_k, \tag{9.16}$$

tai nesunku pastebėti, kad seka $\{b_n\}$ mažėja, o seka $\{a_n\}$ didėja. Panagrinėkime pavyzdį.

$$1+1,-1,1+\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1+\frac{1}{3},-\frac{1}{3},...,1+\frac{1}{n},-\frac{1}{n},...$$
$$x_{2n-1}=1+\frac{1}{n},x_{2n}=-\frac{1}{n},n=1,2,... \tag{9.17}$$
$$b_1=2,b_2=1\frac{1}{2},b_3=1\frac{1}{2},b_4=1\frac{1}{3},...,b_{2n-1}=1\frac{1}{n},b_{2n}=1\frac{1}{n+1},...$$
$$a_1=-1,a_2=-1,...,a_{2n-1}=-\frac{1}{n},a_{2n-1}=-\frac{1}{n},... \tag{9.18}$$
$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\lim_{n\to\infty}b_n=1. \tag{9.19}$$
Elementarios viršutinių ir apatinių ribų savybės atrodys truputį sudėtingiau.

Teiginys 9.3. Teisingos tokios nelygybės
$$\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n+\underline{\lim}_{n\to\infty}y_n\le\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n\le\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n \tag{9.20}$$
Įrodymas. Laikykime, kad abi sekos aprėžtos. Pradžiai įrodysime paskutiniąją (9.20) nelygybę. Pateiksime pavyzdį, iš kurio matyti, kad gali būti griežta nelygybė.
$$x_n=\frac{1+(-1)^n}{2},n=0,1,...\text{ arba }1,0,1,0,... \tag{9.21}$$

$$y_n=\frac{1-(-1)^n}{2},n=0,1,...\text{ arba }0,1,0,1,... \tag{9.22}$$
$$x_n+y_n=1,\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)=1,\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=1,\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n=1 \tag{9.23}$$
Išrinkime iš sekos $\{x_n+y_n\}$ posekį, kuris konverguotų į sekų sumos viršutinę ribą, t.y.
$$\lim_{k\to\infty}\left(x_{n_k}+y_{n_k}\right)=\overline{\lim}_{n\to\infty}\left(x_n+y_n\right). \tag{9.24}$$
Kaip matyti iš pavyzdžių 9.21 ir 9.22, šitas posekis gali būti pati seka. Posekis $\left\{x_{n_k}\right\}$ gali ir nekonverguoti. Mūsų pavyzdyje 9.21 taip ir yra – seka $\{x_n\}$ nekonverguoja. Tada iš posekio $\left\{x_{n_k}\right\}$ galima išrinkti posekį $\left\{x_{n_{k_l}}\right\}$, kuris konverguotų (Vejerštraso teorema). Konverguos ir atitinkamas sekos $\{y_n\}$ posekis $\left\{y_{n_{k_l}}\right\}$, nes jį galima išreikšti dviejų konverguojančių posekių skirtumu
$$y_{n_{k_l}}=\left(y_{n_{k_l}}+x_{n_{k_l}}\right)-x_{n_{k_l}}.$$
$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n\to\infty}\left(x_n+y_n\right)&=\lim_{k\to\infty}\left(x_{n_k}+y_{n_k}\right)(išrinkome\cdot tokį\cdot posekį)\\&=\lim_{l\to\infty}\left(x_{n_{k_l}}+y_{n_{k_l}}\right)(konverguojančios\cdot sekos\cdot posekis\cdot konverguoja)\\&=\lim_{l\to\infty}x_{n_{k_l}}+\lim_{l\to\infty}y_{n_{k_l}}\ (sekų\cdot sumos\cdot riba)\\&\le\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty}y_n(dalinė\cdot riba\cdot mažesnė\cdot už\cdot viršutinę\cdot ribą)\end{aligned}$$
Užduotis 9.1. Panašiai įrodykite kitas (9.20) nelygybes.

Pabaigai galima suformuluoti akivaizdų teiginį
Teiginys 9.4. $\exists\lim_{n\to\infty}x_n\Leftrightarrow\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$.

Įrodymas. Būtinumas išplaukia iš to, kad konverguojančios sekos bet koks posekis konverguoja ir turi tą pačią ribą. Taigi dalinių ribų aibė sudaryta tik iš vieno elemento.

Pakankamumas. Laikykime, kad seka aprėžta. Be to, pažymėkime

$$c = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n . \tag{9.25}$$

Paimkime bet kokį teigiamą ε. Sekos narių, didesnių už $c+\varepsilon$, gali būti tik baigtinis skaičius. Priešingu atveju, iš begalinio skaičiaus sekos narių, didsenių už $c+\varepsilon$, galėtume išrinkti konverguojantį posekį, kurio riba taip pat būtų didesnė arba lygi $c+\varepsilon$. Taip būti negali, nes c yra didžiausioji dalinė riba.
Analogiškai sekos narių, mažesnių už $c-\varepsilon$, taip pat gali būti tik baigtinis skaičius. Vadinasi, ne intervale $(c-\varepsilon;c+\varepsilon)$ gali būti tik baigtinis skaičius sekos narių. Tai reiškia, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.

Pastaba. Teiginio 9.3 pakankamumo įrodyme naudojome šiek tiek "suliteratūrintą" sekos ribos apibrėžimo variantą:
Skaičius c yra sekos $\{x_n\}$ riba, jei bet kokiam teigiamam ε už intervalo $(c-\varepsilon;c+\varepsilon)$ yra tik baigtinis skaičius sekos narių.
Galima parašyti keletą ekvivalenčių frazių:
"ne intervale $(c-\varepsilon;c+\varepsilon)$ yra tik baigtinis skaičius sekos narių";
"intervale $(c-\varepsilon;c+\varepsilon)$ yra visi sekos nariai, išskyrus, galbūt, baigtinį jų skaičių";
"intervale $(c-\varepsilon;c+\varepsilon)$ yra visi sekos nariai, pradedant tam tikru nariu";
"egzistuoja toks N, kad $x_n \in (c-\varepsilon;c+\varepsilon)$, jei $n > N$";
"$\exists N, n > N \Rightarrow |x_n - c| < \varepsilon$".

<u>Užduotis 9.2</u>. Pabandykite paaiškinti, kodėl teiginio 9.1 įrodymas skiriasi nuo to, kuris buvo pateiktas paskaitos metu.