## 8. REALIŲJŲ SKAIČIŲ PILNUMAS (EGZISTENCIJOS TEOREMOS)

Mes suformulavome ir naudojome keletą realiųjų skaičių aibės savybių, tvirtinančių tam tikrų objektų (skaičių) egzistavimą. Prisiminkime jas:

1. **Monotoniškų aprėžtų sekų ribos** (MonSek). Monotoniška ir aprėžta realiųjų skaičių seka konverguoja.
2. **Supremumo aksioma** (SupAks). Netuščias ir aprėžtas realiųjų skaičių poaibis turi tikslųjį apatinį ir viršutinį rėžius.
3. **Susitraukiančiųjų intervalų lema** (SusInt). Jei intervalų seka $\{I_n, I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}\}$ tenkina sąlygas
   - $I_{n+1} \subseteq I_n, \forall n$, arba seka $\{a_n\}$ didėja, o seka $\{b_n\}$ mažėja; (8.1)
   - $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, (8.2)

   tai egzistuoja vienintelis realusis skaičius $\alpha, \alpha \in I_n, \forall n$.
4. **Koši kriterijus** (KošiKr). Seka konverguoja tada ir tik tada, kai ji tenkina Koši sąlygą, t.y.

   $$\left\{\exists \lim_{n\to\infty} x_n\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \exists N, n, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon\right\} \qquad (8.3)$$

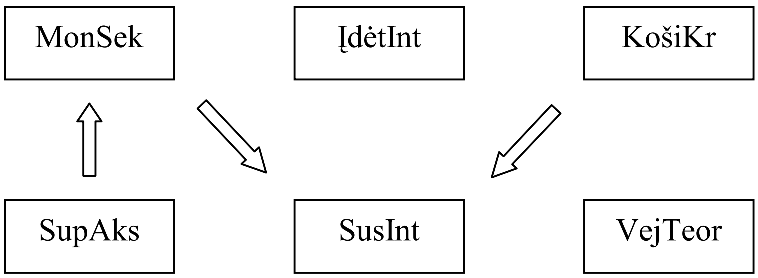
Koši kriterijaus būtinumas yra akivaizdus. Šiame skyriuje, sakydami "Koši kriterijus", turėsime galvoje pakankamumą, t.y. rodyklę $\Leftarrow$ formuluotėje (8.3). Visos šios keturios savybės reiškia realiųjų skaičių pilnumą. Pateiksime dar keletą panašių savybių.

5. **Vejerštraso teorema** (VejTeor). Kiekviena aprėžta realiųjų skaičių seka turi konverguojantį posekį.
6. **Įdėtųjų intervalų lema** (ĮdėtInt). Jei intervalų seka $\{I_n, I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}\}$ tenkina sąlygą

   $I_{n+1} \subseteq I_n, \forall n$, (8.4)

   tai egzistuoja realusis skaičius $\alpha, \alpha \in I_n, \forall n$.

Visas šias savybes (teoremas) su įrodytais ryšiais tarp jų galime galime pavaizduoti tokia schema.




Parodysime, kad šie visi teiginiai yra tam tikra prasme ekvivalentiški.

**Teiginys 8.1.** Jei teisinga susitraukiančiųjų intervalų lema, tai teisinga ir Vejerštraso teorema.

Duota:

- Aprėžta realiųjų skaičių seka $\{x_n\}$.
- Teisinga susitraukiančiųjų intervalų lema.

Reikia įrodyti: Seka $\{x_n\}$ turi konverguojantį posekį.

Įrodymas.

1. Sukonstruosime intervalų seką, tenkinančią susitraukiančiųjų intervalų lemos sąlygas. Sakykime, seka $\{x_n\}$ yra aprėžta, t.y. egzistuoja $M, |x_n| \le M, \forall n$. Apibrėžkime intervalą $[a_1, b_1] = [-M, M]$. Šiame intervale yra visi sekos nariai. Dalinkime intervalą pusiau ir nagrinėkime du intervalus $[-M, 0], [0, M]$. Bent viename iš jų turi būti be galo daug sekos $\{x_n\}$ narių. Pažymėkime jį $[a_2, b_2]$. Antrojo intervalo ilgis $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$. Tęskime šią procedūrą. Taip gausime intervalų seką $[a_n, b_n]$, tenkinančią sąlygas:
   - $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \forall n$; (8.5)
   - $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1) \to 0, n \to \infty$; (8.6)
   - kiekviename intervale $[a_n, b_n]$ yra be galo daug sekos narių.
2. Naudokimės susitraukiančiųjų intervalų lema:

$$\exists c, c \in \mathbb{R}, c = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k. \tag{8.7}$$

3. Įrodysime, kad egzistuoja sekos $\{x_n\}$ posekis $\{x_{n_k}\}$, konverguojantis į $c$.

Pasirinkime bet kokį sekos narį; pažymėkime jį $x_{n_1}$. Jis tenkina sąlygą

$$a_1 \le x_{n_1} \le b_1. \tag{8.8}$$

Intervale $[a_2, b_2]$ yra be galo daug sekos $\{x_n\}$ narių. Iš jų galima parinkti tokį narį, kurio numeris yra didesnis už $n_1$, t.y.

$$\exists n_2, n_1 < n_2, a_2 \le x_{n_2} \le b_2. \tag{8.9}$$

Taip tęsdami procesą gausime sekos $\{x_n\}$ posekį $\{x_{n_k}\}$, tenkinantį sąlygą

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k, \forall k. \tag{8.10}$$

Pereikime prie ribos šiose nelygybėse. Remiantis dviejų policininkų principu, gauname, kad posekis $\{x_{n_k}\}$ konverguoja ir

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = c. \tag{8.11}$$

**Teiginys 8.2.** Jei teisinga Vejerštraso teorema, tai teisingas ir Koši kriterijus.

Duota:
- Realiųjų skaičių seka $\{x_n\}$ tenkina Koši sąlygą.
- Teisinga Vejerštraso teorema.

Reika įrodyti: Seka $\{x_n\}$ konverguoja, t.y. $\exists c, c \in \mathbb{R}, c = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Įrodymas.

1. Įrodykime, kas seka $\{x_n\}$, tenkinanti Koši sąlygą, yra aprėžta. Paimkime $\varepsilon = 1$. Tada

$$\exists N, n > N, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < 1 \Rightarrow x_m - 1 < x_n < x_m + 1. \tag{8.12}$$

Fiksuokime $m_0, m_0 > N$. Tada sekos nariai, kai $n > m_0$, tenkins nelygybę

$$x_{m_0} - 1 < x_n < x_{m_0} + 1 \tag{8.13}$$

ir sekos rėžį galima apibrėžti taip

$$M = \max\left\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_{m_0}|,|x_{m_0}-1|,|x_{m_0}+1|\right\}. \tag{8.14}$$

2. Pasinaudokime Vejerštraso teorema: aprėžta seka $\{x_n\}$ turi konverguojantį posekį, t.y. egzistuoja tokie $\{x_{n_k}\}$ir $c, c\in\mathbb{R}$, kad $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$.
3. Įrodysime, kad šis skaičius *c* yra ir visos sekos $\{x_n\}$ riba. Reikia įvertinti skirtumą

$$|c - x_n| = |c - x_{n_k} + x_{n_k} - x_n| \le |c - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_n|. \tag{8.15}$$

Paskutinysis dėmuo šioje nelygybėje gali būti mažesnis už $\frac{\varepsilon}{2}$, jei $n > N_1, n_k > N_1$. Tokio $N_1$ egzistavimą garantuoja Koši sąlyga. Pirmasis dėmuo dešiniojioje nelygybės (8.15) pusėje bus mažesnis $\frac{\varepsilon}{2}$, kai $k > K$. Tokio K egzistavimą teigia posekio konvergavimas. Kad galiotų abu įverčiai, reika paimti $N = \max\left\{N_1, n_{\lfloor K\rfloor+1}\right\}$.

Dar nesusieta su niekuo liko įdėtųjų intervalų lema. Ji panaši į susitraukiančiųjų intervalų lemą. Kai kurie autoriai jų neskiria, tik prie įdėtųjų intervalų lemos prideda vieną papildomą sąlygą.

**Teiginys 8.3.** Jei teisinga monotoniškų aprėžtų sekų savybė, tai teisinga įdėtųjų intervalų lema.
<u>Duota</u>:

- Įdėtųjų intervalų seka, t.y. seka $I_n = [a_n, b_n]$, tenkinanti sąlygą

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] = I_n, \forall n; \tag{8.16}$$

- Teisinga monotoniškų aprėžtų sekų savybė.

<u>Reikia įrodyti</u>: Egzistuoja toks $c, c\in\mathbb{R}, c\in I_n, \forall n$.
<u>Įrodymas</u>.

1. Seka $\{a_n\}$ yra didėjanti ir aprėžta iš viršaus (bet kokiu $b_n$), seka $\{b_n\}$ yra mažėjanti ir aprėžta iš apačios (bet kokiu $a_n$).
2. Remiamės monotoniškų ir aprėžtų sekų savybe
   $\exists c, c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n; \exists d, d = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Be to, $a_n < b_n \Rightarrow c \le d$.
3. Turime nelygybes $a_n \le c \le d \le b_n, \forall n$. Bet koks taškas iš intervalo $[c, d]$ tenkins lemos reikalavimus.

Jau susiejome visas anksčiau paminėtas realiųjų skaičių savybes. Matome, kad į bet kurią savybę galima "ateiti" iš supremumo aksiomos. Ši savybė ir pavadinta "aksioma", nes labai dažnai vadovėliuose ji priimama kaip aksioma, o visos kitos savybės įrodomos kaip teoremos. Čia būtų galima ir sustoti, bet skyrelio pradžioje buvo pažadėta daugiau – visos savybės yra ekvivalenčios, t.y. iš bet kurios galima pradėti ir "pasiekti" bet kurią kitą.
**Teiginys 8.4**. Jei teisinga susitraukiančiųjų intervalų lema, tai teisinga ir supremumo aksioma.
<u>Duota</u>:

- Netuščia ir aprėžta iš viršaus realiųjų skaičių aibė. Arba simbolių kalba
  $A, A\subset\mathbb{R}, A\ne\varnothing, \exists m, m\in\mathbb{R}, a\le m, \forall a, a\in A;$

- Teisinga susitraukiančiųjų intervalų lema.

Reikia įrodyti: Aibė $A$ turi tikslųjį viršutinį rėžį, t.y. $\exists c, c \in \mathbb{R}, c = \sup A$.

Įrodymas.

1. Sukonstruokime intervalų seką, tenkinančią lemos sąlygas.

Pasirinkime bet kokį $a, a \in A$. Tokių taškų yra, nes $A \neq \emptyset$. Skaičius $m$ yra aibės $A$ viršutinis rėžis. Jei $a = m$, tai $a = \sup A$. Jei $a < m$, tai apibrėškime $[a_1, b_1] = [a, m]$.

Šį intervalą dalinkime pusiau tašku $\frac{a_1 + b_1}{2}$. Gali būti du atvejai:

- Taškas $\frac{a_1 + b_1}{2}$ yra aibės $A$ viršutinis rėžis. Tada apibrėžkime

$$[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right]. \tag{8.17}$$

- Taškas $\frac{a_1 + b_1}{2}$ nėra aibės $A$ viršutinis rėžis. Tada $\exists a_2, a_2 \in A, \frac{a_1 + b_1}{2} < a_2$.

  Apibrėžkime intervalą $[a_2, b_2] = [a_2, b_1]$.

Taip mes galime sukonstruoti intervalų seką $[a_n, b_n]$, turinčią savybes:

- Kairysis kiekvieno intervalo galas $a_n$ yra aibės $A$ taškas.
- Dešinysis kiekvieno intervalo galas $b_n$ yra aibės $A$ viršutinis rėžis.
- Be to, $b_n - a_n \leq \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$. Tada indukcijos metodu galime įrodyti, kad

$$b_n - a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1) \to 0, n \to \infty. \tag{8.18}$$

Jei kuriam nors $n$ būtų $a_n = b_n$, tai $b_n = \sup A$.

2. Pasinaudokime susitraukiančiųjų intervalų lema:

$$\exists c, c \in \mathbb{R}, c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{8.19}$$

3. Įrodykime, kad $c = \sup A$. Kadangi kiekvieno intervalo dešinysis galas yra aibės $A$ viršutinis rėžis, tai

$$\forall a, a \in A, \forall n, a \leq b_n. \tag{8.20}$$

Pereikime prie ribos pastarojoje nelygybėje. Gauname

$$a \leq \lim_{n\to\infty} b_n = c, \forall a, a \in A. \tag{8.21}$$

Vadinasi, $c$ yra aibės $A$ viršutinis rėžis. Paimkime $\varepsilon, \varepsilon > 0$. Remkimės (8.19) sąlyga

$$\exists N,\ n > N \Rightarrow c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon.$$

Bet $a_n$ yra aibės $A$ elementai. Taigi $c - \varepsilon$ negali būti aibės $A$ viršutiniu rėžiu. Vadinasi, $c$ yra mažiausiasis aibės $A$ viršutinis rėžis, t.y. $c = \sup A$.

Jau yra įrodyta penkių savybių ekvivalentiškumas. Įrodysime dar vieną teiginį.

**Teiginys 8.5.** Jei teisinga įdėtųjų intervalų lema, tai teisinga susitraukiančiųjų intervalų lema.

Duota:

- Susitraukiančiųjų intervalų seka, t.y. seka $I_n = [a_n, b_n]$, tenkinanti sąlygas

  $I_{n+1} \subseteq I_n, \forall n$;

  $(b_n - a_n) \to 0, n \to \infty$.

- Teisinga įdėtųjų intervalų lema.

<u>Reikia įrodyti</u>: Egzistuoja toks vienintelis $c, c \in \mathbb{R}, c \in I_n, \forall n$.

<u>Įrodymas</u>.

1. Intervalų seka $I_n = [a_n, b_n]$ tenkina įdėtųjų intervalų lemos sąlygas.
2. Įdėtųjų intervalų lema teigia, kad
   $\exists c, c \in \mathbb{R}, c \in I_n, \forall n$ arba $a_n \le c \le b_n, \forall n$. (8.22)
3. Vienaties įrodymas visiškai toks pat, kaip lemoje 6.2.

Dabar galime pažiūrėti, kaip atrodo pilnumo savybių sąryšių schema.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{MonSek}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \boxed{\text{ĮdėtInt}} \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{KošiKr}} \arrow[dl, Rightarrow] \\
\boxed{\text{SupAks}} \arrow[u, Rightarrow] & \boxed{\text{SusInt}} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{VejTeor}} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Matome, kad daugiausiai "dirbo" susitraukiančiųjų intervalų lema. Ji buvo įrodyta tris kartus ir buvo naudojama kitų savybių įrodymams du kartus. Visos šios savybės išreiškia realiųjų skaičių aibės pilnumą. Literatūroje galima rasti ir kitų ekvivalentiškų teiginių. Vieni yra skirtingi iš esmės, o kiti skiriasi tik detalėmis. Matematinės analizės vadovėliai gali būti dviejų tipų:

- Realieji skaičiai apibrėžiami aksiomatiškai ir dar prijungiama viena iš šių savybių kaip aksioma. Visos kitos savybės įrodomos kaip teoremos.
- Konstruojama realiųjų skaičių aibė (iš racionaliųjų) ir kuri nors savybė, charakterizuojanti pilnumą, yra įrodoma. Po to įrodomos ir visos kitos savybės.

Mes nekonstruosime realiųjų skaičių aibės. Parodėme, kad kaip pilnumo aksiomą galime pasirinkti bet kurią iš suformuluotų savybių.

<u>Užduotis 8.1.</u> Paimkite bet kokį matematinės analizės vadovėlį.
Išsiaikinkite, ar jame yra realiųjų skaičių konstrukcija. Jei taip, tai kokia savybė įrodoma pirmiausiai. Po to nubrėžkite įrodymų schemą.
Jei realiųjų skaičių konstrukcijos nėra, tai suraskite, kokia savybė priimama kaip aksioma. Po to vėl nubrėžkite įrodymų schemą.

Yra dar viena realiųjų skaičių savybė, išreiškianti realiųjų skaičių pilnumą.

**Baigtinio denginio (Borelio) lema**. Bet koks uždarojo intervalo $[a,b]$ denginys atviraisiais intervalais turi baigtinį podenginį, t.y.

$$\{I_\alpha, I_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha), \alpha \in A\}, \ \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \supseteq [a,b] \tag{8.23}$$

$\Rightarrow \exists$ tokia baigtinė indeksų $\alpha_k, \alpha_k \in A, k = 1, \dots, m$ sistema, kad

$$\bigcup_{i=1}^{m} I_{\alpha_i} \supseteq [a,b]. \tag{8.24}$$

Ši savybė nepasirodo kalbant apie sekas. Jos formuluotė yra gana neįprasta ir sunkiai suvokiama. Vėliau prie jos grįšime ir parodysime sąryšius su kitomis pilnumą išreiškiančiom savybėm.