7. Pavyzdiniai uždavinai

Nagrinėsime seką, nusakyta formule

$$x_{n+1} = kx_n(1-x_n)\,. \tag{7.1}$$

Panagrinėsime, kaip keičiasi sekos elgesys, kintant parametrui k ir pradinei reikšmei x_0. Labai svarbus instrumentas sekos elgesiui tirti bus "voratinklis".

I. $k = 1, x_{n+1} = x_n(1-x_n) = x_n - x_n^2.$ (7.2)

Iš pradžių išnagrinėsime specialius atvejus.

$$x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 0,$$
$$x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = ... = x_n = 0.$$

Visais kitais atvejais "voratinklis" rodo, kad seka mažėjanti. Patikrinkime tai analiziškai.

$$x_{n+1} - x_n = x_n - x_n^2 - x_n = -x_n^2 \le 0. \tag{7.3}$$

Formulė (7.2) rodo, kad seka tikrai yra mažėjanti. Nagrinėkime atvejį, kai $x_0 < 0.$

"Voratinklis" rodo, kad seka artėja į $-\infty.$ Tai įrodysime keletu būdų.

1. Sakykime, kad seka $\{x_n\}$ aprėžta iš apačios. Tada ji turi ribą (monotoniškų aprėžtų sekų savybė). Pažymėkime

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,. \tag{7.4}$$

Pereikime prie ribos lygybėje (7.2)

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} x_n^2\,,$$
$$a = a - a^2\,,$$
$$a = 0. \tag{7.5}$$

Bet seka $\{x_n\}$ yra mažėjanti. Tada

$$x_n \le x_0 < 0, \forall n\,. \tag{7.6}$$

Perėję prie ribos nelygybėje (7.6), gauname

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \le x_0 < 0\,. \tag{7.7}$$

Sąlygos (7.5) ir (7.7) prieštarauja viena kitai. Vadinasi, prielaida apie sekos aprėžtumą neteisinga. Tada seka $\{x_n\}$ iš apačios nėra aprėžta. Kadangi ji dar yra mažėjanti, tai

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty. \tag{7.8}$$

2. Pirmasis būdas yra grynai loginis. Jis visiškai nieko nepasako apie tai, kaip greitai seka artėja į $-\infty$. Pabandysime gauti kokį nors įvertį. Galima parašyti lygybę

$$x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ... + (x_1 - x_0) + x_0\,. \tag{7.9}$$

Šią lygybę galima interpretuoti geometriškai: x_0 yra pradinė sekos padėtis, dydis skliaustuose $x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, ..., n$ yra sekos žingsnis, x_n - sekos padėtis po n žingsnių. Jei kiekvienas žingsnis

$$|x_k - x_{k-1}| \ge c > 0\,, \tag{7.10}$$

tai per n žingsnių seka nueis daugiau negu nc. Kadangi seka mažėjanti, tai ji juda į kairę ir reikia rašyti

$$\begin{aligned} x_k - x_{k-1} &\le -c, k = 1, 2, ..., n, \\ x_n &\le -nc + x_0. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Akivaizdu, kad

$$\lim_{n\to\infty}(-nc + x_0) = -\infty. \tag{7.12}$$

Tai buvo geometrinė idėja, išreikšta analiziškai. Dabar reikia gauti konkretų sekos žingsnio įvertį. Formulė (7.3) $x_{k+1} - x_k = -x_k^2$ tiksliai apskaičiuoja žingsnį. Mes žinome, kad seka $\{x_n\}$ mažėja (būdama neigiama). Vadinasi,

$$\begin{aligned} & x_n^2 \geq x_{n-1}^2 \geq \ldots \geq x_1^2 \geq x_0^2 > 0, \\ & -x_n^2 \leq -x_{n-1}^2 \leq \ldots \leq -x_1^2 \leq -x_0^2 \\ & x_{k+1} - x_k = -x_k^2 \leq -x_0^2, k = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{7.13}$$

Įstatę gautą įvertį į (7.11), gauname

$$x_n \leq -nx_0^2 + x_0. \tag{7.14}$$

3. Pabandykime gauti tikslesnį įvertį. Prisiminkime, kad nagrinėjame atvejį, kai $x_0 < 0$. Skaičiuokime

$$\begin{aligned} & x_1 = x_0(1 - x_0), \\ & x_2 = x_1(1 - x_1) = x_0(1 - x_0)(1 - x_1). \end{aligned} \tag{7.15}$$

$(1 - x_0)$, $(1 - x_1)$ reiškia x_0 ir x_1 atstumus iki 1. Seka mažėjanti (neigiama!), todėl

$$\begin{aligned} & 1 - x_1 \geq 1 - x_0, \\ & x_0 \left(1 - x_1\right) \leq x_0 \left(1 - x_0\right). \end{aligned} \tag{7.16}$$

Įstatę įvertį (7.16) į (7.15), gauname

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0(1 - x_0)(1 - x_1) \\ &\leq x_0(1 - x_0)(1 - x_0) = x_0(1 - x_0)^2. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Galime iškelti hipotezę (padaryti indukcinę prielaidą)

$$x_n \leq x_0 \left(1 - x_0\right)^n. \tag{7.18}$$

Lieka atlikti indukcijos žingsnį.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n(1 - x_n) \Leftarrow (apibr\dot{e}\check{z}imas) \\ &\leq x_0(1 - x_0)^n(1 - x_n) \Leftarrow (indukcijos \cdot prielaida) \\ &\leq x_0(1 - x_0)^n(1 - x_0) \Leftarrow 1 - x_n \geq 1 - x_0, x_0 < 0, \\ &= x_0(1 - x_0)^{n+1}. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Paskutiniojoje formulėje neturėtų klaidinti minuso ženklas. Kadangi $x_0 < 0$, tai minėtasis skirtumas yra didesnis už 1. Todėl

$$\lim_{n \to \infty} x_0(1 - x_0)^n = -\infty. \tag{7.20}$$

Paimkime konkrečią reikšmę $x_0 = -1$ ir palyginkime įverčius (7.14), (7.19) su tikrosiomis sekos $\{x_n\}$ reikšmėmis. Paimkime taip pat konkretų $E = -1000$.

$$\begin{aligned} & x_n \leq -n \cdot 1^2 + 1 = -n + 1 < -1000, \\ & -n < -1001, \\ & \ n > 1001. \end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\begin{aligned} & x_n \leq -1 \cdot (1 + 1)^n = -2^n < -1000, \\ & 2^n > 1000, \\ & 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \\ & n > 9. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Apskaičiuokime sekos narius tiksliai:

$$\begin{aligned} & x_0 = -1, x_1 = -1 \cdot 2 = -2, x_2 = -2(1 + 2) = -6, x_3 = -6(1 + 6) = -42, \\ & x_4 = -42 \cdot 43 = 1806. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Matome, kad jau $x_4 > 1000$.

Nagrinėkime pradinę reikšmę $x_0, 0 < x_0 < 1$. “Voratinklis” turi rodyti, kad seka mažėjanti. Tai rodo ir formulė (7.3). Reikia įrodyti, kad seka aprėžta iš apačios. Vėl “voratinklis” sako, kad apatinis rėžis turėtų būti 0. Sakykime, kad

$$0 < x_n < 1 (indukcijos \cdot prielaida)$$

$$x_{n+1} = x_n(1-x_n) > 0 \Leftarrow 0 < x_n < 1.$$

$$x_{n+1} = x_n(1-x_n) \le \left(\frac{x_n + 1 - x_n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1 \Leftarrow \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}.$$

Vadinasi, egzistuoja $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Perėję prie ribos lygybėje (7.2) gauname (7.5), kad $a = 0$.

$$\text{II. } k = 2, x_{n+1} = 2x_n(1-x_n). \quad (7.24)$$

Vėl iš pradžių nubrėžkime tiesę $y = x$ ir parabolę $y = 2x(1-x)$. Iš pradžių nagrinėkime specialius atvejus

$$\begin{aligned} &x_0 = 0, x_1 = 0, ..., x_n = 0, \\ &x_0 = 1/2, x_1 = 2\cdot 1/2(1-1/2) = 1/2, ..., x_n = 1/2. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Nagrinėkime $0 < x_0 < 1/2$. “Voratinklis” rodo, kad seka didėjanti. Įrodykime tai.

$$x_{n+1} - x_n = 2x_n(1-x_n) - x_n = x_n(1-2x_n). \quad (7.26)$$

Sandauga dešiniojoje lygybės (7.26) bus teigiama, jei abu daugikliai bus teigiami. Taip bus tada, kai visi sekos nariai tenkins nelygybę

$$0 < x_n < 1/2. \quad (7.27)$$

Tebūnie nelygybės (7.27) indukcijos prielaida.

$$\begin{aligned} &x_{n+1} = 2x_n(1-x_n) > 0 \Leftarrow 0 < x_n < 1/2, \\ &x_{n+1} = 2x_n(1-x_n) \le 2\left(\frac{x_n + 1 - x_n}{2}\right)^2 \Leftarrow \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \\ &\quad = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Indukcijos būdu įrodėme, kad teisingos nelygybės (7.27). Dabar galime teigti, kad dydžiai lygybėse (7.26) yra teigiami. Vadinasi, seka $\{x_n\}$ didėja, aprėžta iš viršaus (nelygybės (7.27)), todėl konverguoja. Pažymėkime $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Pereikime lygybėje (7.24) prie ribos.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= 2\lim_{n\to\infty} x_n(1 - \lim_{n\to\infty} x_n), \\ a &= 2a(1-a), \\ 0 &= a(1-2a), \\ a_1 &= 0, a_2 = 1/2. \end{aligned}$$

Gavome dvi lygties šaknis. Katra gera? Mes pradėjome reikšme $x_0, 0 < x_0$. Be to, seka didėjanti, t.y.

$$x_0 \le x_n, \forall n. \quad (7.29)$$

Todėl

$$0 < x_0 \le \lim_{n\to\infty} x_n = a. \quad (7.30)$$

Vadinasi, tinka antroji lygties šaknis $a = 1/2$.

III. $k=-\frac{1}{2}, x_{n+1}=-\frac{1}{2}x_n(1-x_n).$ (7.31)

Nubrėžkime tiesę $y=x$ ir parabolę $y=-\frac{1}{2}x(1-x)$. Nubrėžkime "voratinklį', kai $0<x_0<1$. Matome, kad seka nėra monotoniška, bet keičia ženklą. Panašu, kad seka turėtų konverguoti į 0. Konvergavimui įrodyti naudosime Koši kriterijų. Tam reikia gauti įvertį

$$|x_{n+1}-x_n|\le q|x_n-x_{n-1}|, 0<q<1, \forall n \qquad (7.32)$$

Tokio įverčio pakanka, kad galiotų Koši sąlyga. Pradžiai pastebėsime, kad mažiausia funkcijos $y=g(x)=-\frac{1}{2}x(1-x)$ reikšmė intervale [0;1] yra $-\frac{1}{8}$, o

$$g\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)=\frac{9}{128}<\frac{1}{8}. \qquad (7.33)$$

Galime laikyti, kad

$$0<x_0<1 \Rightarrow -\frac{1}{8}\le x_n\le\frac{1}{8}, n=1,2,... \qquad (7.34)$$

Vertinkime gretimų sekos narių skirtumą

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n| &= \left|-\frac{1}{2}x_n(1-x_n)+\frac{1}{2}x_{n-1}(1-x_{n-1})\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|-x_n+x_{n-1}+x_n^2-x_{n-1}^2\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|(x_{n-1}-x_n)+(x_n-x_{n-1})(x_n+x_{n-1})\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|(x_{n-1}-x_n)(1-(x_n+x_{n-1}))\right| \\ &= \frac{1}{2}|x_{n-1}-x_n|\left|1-(x_n+x_{n-1})\right|\end{aligned} \qquad (7.35)$$

Pasinaudoję (7.34) gauname

$$\begin{aligned}\left|1-(x_n+x_{n-1})\right| &\le 1+|x_n+x_{n-1}| \\ &\le 1+|x_n|+|x_{n-1}| \\ &\le 1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}\end{aligned} \qquad (7.36)$$

Įstatę pastarąjį įvertį į (7.35), gauname

$$|x_{n+1}-x_n|\le\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|\frac{5}{4}=\frac{5}{8}|x_n-x_{n-1}| \qquad (7.37)$$

Aišku, kad $\frac{5}{8}<1$. Taigi, Koši sąlyga bus patenkinta. Seka konverguos. Pažymėkime $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ ir pereikime prie ribos lygybėje (7.31). Gauname

$$\begin{aligned}&a=-\frac{1}{2}a(1-a),\\ &0=-\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}a^2,\\ &0=\frac{1}{2}a(-3+a),\\ &a_1=0, a_2=3.\end{aligned}$$

Iš sąlygos (7.34) gauname, kad $-\frac{1}{8} \le a \le \frac{1}{8}$. Vadinsi, sekos riba $a = 0$.

Iš “voratinklio” (taip pat iš sekos apibrėžimo) matyti, kad sekos nariai kaskart keičia ženklą, t.y. x_{n-1}, x_n yra skirtingų ženklų. Tada galima pabandyti pagerinti įvertį (7.36).

$$
\begin{aligned}
|x_n + x_{n-1}| &= \left| -\frac{1}{2} x_{n-1}(1 - x_{n-1}) + x_{n-1} \right| \\
&= \left| \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{2} x_{n-1}^2 \right| \\
&= \frac{1}{2} |x_{n-1}| |1 + x_{n-1}| \\
&\le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) = \frac{9}{128}
\end{aligned}
\tag{7.38}
$$

Tada

$$
1 + |x_n + x_{n-1}| \le 1 + \frac{9}{128} = \frac{137}{128}
$$

$$
|x_{n+1} - x_n| \le \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}| \frac{137}{128} = \frac{137}{256} |x_n - x_{n-1}| \tag{7.39}
$$

Palyginkime konstantas

$$
\frac{5}{8} = 0.625, \frac{137}{256} = 0.535.
$$

Matome, kad antroji konstanta truputį mažesnė.

Užduotys. Duota funkcija $g(x) = ax^2 + 1$ ir seka $x_{n+1} = ax_n^2 + 1, x_0$.

1. $a = 2, x_0 = 0$. Įrodykite (skirtingais būdais), kad $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
2. $a = 2, x_0 > 0$. Įvertinkite seką $\{x_n\}$ ir įrodykite, kad $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
3. $a = \frac{1}{4}, 0 < x_0 < 2$. Įrodykite, kad seka didėjanti ir aprėžta. Raskite jos ribą.
4. $a = \frac{3}{16}, \frac{4}{3} < x_0 < 4$. Įrodykite, kad seka mažėjanti ir aprėžta. Raskite sekos ribą.
5. $a = -\frac{1}{4}, x_0 = 0$. Naudodami Koši kriterijų raskite sekos ribą.