6. ŠAKNIES RADIMO ALGORITMAS

Istorija. Babiloniečių arba Herono algoritmas. Jau žiloje senovėje reikėjo mokėti traukti kavadratinę šaknį. Yra išlikęs Herono iš Aleksandrijos, gyvenusio I mūsų eros amžiuje, veikalas “Metrika”, kuriame aprašytas šaknies radimo iš 720 algoritmas: “Kadangi 720 neturi racionalios šaknies, tai ją surasime su menka paklaida taip: artimiausias skaičiui 720 kvadratas yra 729, turintis šaknį 27; padalinkime 720 iš 27; gausime 26 ir $\frac{2}{3}$; pridėkime 27; gausime 53 ir $\frac{2}{3}$. Paimkime šito pusę; gausime $26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Vadinasi, šaknis iš 720 apytiksliai lygi $26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Iš tikrųjų, $26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ padauginę iš tokio pat skaičiaus, gausime $720\frac{1}{36}$; taigi, skirtumas sudarys 36-ąją vieneto dalį. Jei norėtume padaryti skirtumą mažesnį už 36-ąją dalį, tai vietoje 729 paėmę $720\frac{1}{36}$ ir atlikę tą patį, gautume skirtumą, kuris būtų daug mažesnis už $\frac{1}{36}$”. Šis algoritmas tik aprašytas Herono, bet manoma, kad jis buvo žinomas jau babilonečiams. Todėl jis ir vadinamas Herono arba babiloniečių.

<u>Užduotis 6.1</u>. Apskaičiuokite kvadratinę šaknį iš 2, 3 naudodami Herono algoritmą.

Uždavinio formalizavimas. Pabandykime aprašyti šį algoritmą šiuolaikine matematikos kalba: ieškome kvadratinės šaknies iš skaičiaus $c, c > 0$.

- pasirenkame pirmąją reikšmę $b_1, b_1^2 > c$; (6.1)
- apibrėžiame $a_1 = \frac{c}{b_1}$; (6.2)
- $b_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$;
- $a_2 = \frac{c}{b_2}$

ir t.t. Jei turime skaičius a_n, b_n, tai sekančius apibrėžiame taip

- $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, (6.3)
- $a_{n+1} = \frac{c}{b_{n+1}}$. (6.4)

Geometrinė interpretacija. Reikia nubrėžti hiperbolę $yx = c$ ir tiesę $y = x$.

Sekų savybės. Aritmetiniai skaičiavimai ir geometrinė interpretacija rodo, kad seka $\{a_n\}$ didėja, o seka $\{b_n\}$ mažėja. Be to, abi sekos konverguoja (greitai) į kvadratinę šaknį iš *c*. Pabandykime tai įrodyti analiziškai.

$$b_1^2 > c \Leftrightarrow \frac{1}{b_1^2} < \frac{1}{c} \Rightarrow a_1 = \frac{c}{b_1} = \frac{cb_1}{b_1^2} < \frac{cb_1}{c} = b_1, \tag{6.5}$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + b_1\right) < \frac{1}{2}\left(b_1 + b_1\right) = b_1, \tag{6.6}$$

$$c = a_1 b_1 < \left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right)^2 = b_2^2, \tag{6.7}$$

$$b_2 < b_1 \Rightarrow a_1 = \frac{c}{b_1} < \frac{c}{b_2} = a_2 . \tag{6.8}$$

Tęsdami samprotavimus indukcija gautume, kad

$$\begin{aligned} &a_1 < a_2 < ... < a_n < ..., \\ &b_1 > b_2 > ... > b_n > ..., \\ &a_n < b_n, \\ &a_n b_n = c, \forall n. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Įvertinsime skirtumą $b_n - a_n$:

$$b_2 - a_2 < b_2 - a_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} - a_1 = \frac{b_1 - a_1}{2}.$$

Galime daryti prielaidą, kad

$$b_k - a_k < \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}},$$

kokiam nors *k*. Tada gauname

$$b_{k+1} - a_{k+1} < b_{k+1} - a_k = \frac{a_k + b_k}{2} - a_k = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2^k} . \tag{6.10}$$

Vadinasi, matematinės indukcijos metodu įrodėme

Lema 6.1. Sekos, apibrėžtos 6.1 – 6.4 formulėmis, tenkina sąlygą

$$b_n - a_n < \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}, n = 1, 2, ...$$

Galime reziumuoti ir labiau geometrizuoti tai, ką gavome - intervalų seką $I_n = [a_n, b_n]$, kuri tenkina sąlygas:

- $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \forall n,$ (6.11)
- $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$ (6.12)

Matematikai jau gana seniai tikėjo(XIX amžiuje), kad realiųjų skaičių aibė yra tokia, kad bet kokia intervalų seka, tenkinanti anksčiau minėtas savybes apibrėžia vienintelį realųjį skaičių. Matematinėje literatūroje tai vadinama

Lema 6.2. (Susitraukiančiųjų intervalų lema) Jei intervalų $I_n = [a_n, b_n]$ seka, tenkina sąlygas 6.11, 6.12, tai egzistuoja vienintelis realusis skaičius α, priklausantis visiems intervalams I_n arba $a_n \le \alpha \le b_n, \forall n$.

Įrodymas. Pirmoji sąlyga (6.11) reiškia, kad $a_n \le a_{n+1}, b_{n+1} \le b_n$, t.y. seka $\{a_n\}$ yra didėjanti, o seka $\{b_n\}$ - mažėjanti. Be to, seka $\{a_n\}$ yra aprėžta iš viršaus b_1, o seka $\{b_n\}$ - aprėžta iš apačios a_1. Pagal monotoniškų aprėžtų sekų savybę abi sekos turi ribas, kurias pažymėkime $a = \lim_{n\to\infty} a_n, b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Pasinaudokime antrąja lemos sąlyga (6.12)

$$\begin{aligned} &0 = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b, \\ &a = b. \end{aligned}$$

Galime apibrėžti $\alpha = a = b$. Seka $\{a_n\}$ yra didėjanti, o seka $\{b_n\}$ - mažėjanti, todėl

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \ge a_m, b = \lim_{n\to\infty} b_n \le b_m, \forall m.$$

Taigi $a_m \le \alpha \le b_m, \forall m$.

Sakykime, egzistuoja toks β, tenkinantis visas lemos 6.2 sąlygas ir $\alpha \ne \beta$.

Apibrėžkime $\varepsilon = \frac{1}{2}|\beta - \alpha| > 0$. Tada

$$|\alpha-\beta| \le b_n - a_n < \varepsilon = \frac{1}{2}|\alpha-\beta| \Leftarrow n > N \ .$$

Toks N egzistuoja bet kokiam ε, nes $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Iš to išplaukia, kad $\alpha = \beta$.

<u>Moralas</u>. Abi intervalų galų sekos $\{a_n\},\{b_n\}$ konverguoja į tą vienintelį tašką, priklausantį visiems intervalams.

Grįžkime prie šaknies radimo algoritmo. Užduotis buvo surasti tokį *x*, kuris tenkintų sąlygą $x\cdot x = c$. Mes aprašėme algoritmą, kuris pagamina dvi konverguojančias į tą patį skaičių α sekas, tenkinančias lygbę $a_n \cdot b_n = c$. Perėję šioje lygybėje prie ribos, gausime $\alpha\cdot\alpha = c$. Vadinasi, realusis skaičius, kurio egzistenciją garantuoja susitraukiančiųjų intervalų lema, ir yra tas, kurio ieškojome. Jį įprasta žymėti simboliu $\sqrt{c}$ .Pats šaknies simbolis $\sqrt{\ }$ yra stilizuota raidė r (*radix* –lot. šaknis).

Niutono liestinių algoritmas. Kita šaknies algoritmo interpretacija. Sakykime, reikia rasti kvadratinę šaknį iš skaičiaus $c, c > 0$, t.y. rasti tokį *x*, kad $x^2 = c$. Tai perrašome $x^2 - c = 0$ ir nagrinėjame funkciją $f(x) = x^2 - c$. Reikia rasti lygties $f(x) = 0$ šaknį. I.Niutonas (1643-1727) sugalvojo algoritmą tokios lygties šakniai rasti. Pasirinkime pradinę reikšmę $x_0, x_0^2 > c$. Nubrėžkime per tašką $(x_0, f(x_0))$ funkcijos grafiko liestinę. Jos lygtis

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$y = x_0^2 - c + 2x_0(x - x_0) = 2x_0 x - (x_0^2 + c). \qquad (6.13)$$

Ieškome liestinės susikirtimo taško su *x*-sų ašimi, t.y. sprendžiame lygtį

$$0 = 2x_0 x - (x_0^2 + c). \qquad (6.14)$$

Iš čia gauname

$$x = \frac{x_0^2 + c}{2x_0} = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{c}{x_0}\right).$$

Šią reikšmę pažymėkime x_1. Ir t.t., jei turime reikšmę x_n, tai apibrėžiame

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right). \qquad (6.15)$$

Gavome tą patį algoritmą, kaip ir Herono ($x_n = b_{n-1}, n = 1,2,...$). Mes jau įrodėme, kad seka $\{x_n\}$ yra mažėjanti ir $x_n^2 > c > 0$. Galime naudotis monotoniškų aprėžtų sekų savybe apie ribos egzistavimą. Pažymėkime $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Pereikime prie ribos lygybėje (6.15). Gausime

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{c}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}\right),$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{c}{\alpha}), \qquad (6.16)$$

$$\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\frac{c}{\alpha},$$

$$\alpha^2 = c$$

Reikia pastebėti, kad iš nelygybės $x_n^2 > c > 0$ išplaukia $x_n \ge \sqrt{c} > 0$ ir $\alpha \ge \sqrt{c} > 0$.

Sekos Koši konvergavimo kriterijus. Nevisada sekos būna monotoniškos arba pasiseka sudaryti sekų porą, tenkinančią susitraukiančių intervalų lemos sąlygas. Būtų gerai gauti bendresnį sekos konvergavimo kriterijų. Kažkokią mintį duoda susitraukiančiųjų intervalų lema. Jos sąlygose figūruoja dvi sekos $\{a_n\},\{b_n\}$. Jei imsime $m > n$, tai gausime $a_n \le a_m < b_m \le b_n$. Be to, $b_n - a_n \to 0,$ kai $n \to \infty$. Bet kokiam $\varepsilon, \varepsilon > 0,$ galima rasti tokį *N*, kad

$$n > N \Rightarrow |b_n - b_m| < |b_n - a_n| < \varepsilon . \qquad (6.17)$$

Gavome įdomią sąlygą, kurią tenkina seka $\{b_n\}$. Prancūzų matematikas Ogiustenas Koši (Augustin Cauchy, 1789-1857), vienas iš Matematinės analizės kūrėjų, pastebėjo, kad gautos sąlygos pakanka sekos konvergavimui. Nereikia jokio monotoniškumo. Suformuluosime tiksliau.

Teorema 6.3. (Koši konvergavimo kriterijus). Tam, kad seka $\{x_n\}$ konverguotų, būtina ir pakankama, kad ji tenkintų sąlygą:

$$\forall \varepsilon, \varepsilon > 0,\ \exists N; n, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon . \qquad (6.18)$$

Ši sąlyga vadinama Koši sąlyga, o sekos, tenkinančios Koši sąlygą, vadinamos Koši sekomis arba fundamentaliosiomis.

Įrodymas. Būtinumas. Tai elementarioji teiginio dalis. Sakykime, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Reikia įrodyti, kad seka $\{x_n\}$ tenkina Koši sąlygą. Viskas remiasi akivaizdžia nelygybe

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - a + a - x_m| \\ &\le |x_n - a| + |a - x_m| \end{aligned} \qquad (6.19)$$

Pasirinkę bet kokį $\varepsilon, \varepsilon > 0,$ galime rasti *N*, kad

$$\left.\begin{aligned} n > N \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ m > N \Rightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon. \qquad (6.20)$$

Pakankamumas. Šios dalies įrodymą atidėsime vėlesniam laikui. Pradžiai pastebėsime, kad sekos konvergavimui neužtenka tik to, kad skirtumas tarp gretimų sekos narių $|x_{n+1} - x_n|$ artėtų į nulį.

<u>Pavyzdys 6.1.</u> Nagrinėkime seką

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}. \qquad (6.21)$$

Akivaizdu, kad $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1} \to 0$, kai $n \to \infty$. Paimkime $m = 2n$. Tada

$$\begin{aligned} H_m - H_n &= H_{2n} - H_n \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad (6.22)$$

Paėmę $\varepsilon, \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, bet kokį *N* ir bet kokį $n, n > N$, galėsime rasti tokį $m, m = 2n,$ kad

$$|H_m - H_n| = H_m - H_n > \frac{1}{2} > \varepsilon . \qquad (6.23)$$

Įrodėme, kad seka $\{H_n\}$, apibrėžta (6.21) lygybe netenkina Koši sąlygos. Iš Koši kriterijaus (teorema 6.3) išplaukia, kad seka $\{H_n\}$ nekonverguoja.

Užduotis 6.1. Įrodykite, kad $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}) = +\infty.$

Kaip jau minėjome, Koši kriterijaus pakankamumą įrodysime vėliau. Dabar pabandysime taikyti Koši kriterijų šaknies radimo algoritme. Įrodysime, kad seka $\{x_n\}$, apibrėžta sąryšiu (6.15), kai $x_0^2 > c$, tenkina Koši sąlygą.

Įvertinsime skirtumą

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} - x_n| &= \left|\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) - \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{c}{x_{n-1}}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(x_n - x_{n-1}) + \frac{c}{x_n} - \frac{c}{x_{n-1}}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(x_n - x_{n-1}) + \frac{c(x_{n-1} - x_n)}{x_n x_{n-1}}\right| \\
&= \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|\left|1 - \frac{c}{x_n x_{n-1}}\right|
\end{aligned} \qquad (6.24)$$

Mes jau buvome įrodę, kad seka $\{x_n\}$ tenkina sąlygą $x_n^2 > c$. Tada

$$\begin{aligned}
&x_n^2 > c, x_{n-1}^2 > c, \\
&x_n^2 x_{n-1}^2 > c^2, \\
&x_n x_{n-1} > c, \\
&0 < \frac{c}{x_n x_{n-1}} < 1, \\
&0 < 1 - \frac{c}{x_n x_{n-1}} < 1.
\end{aligned} \qquad (6.25)$$

Iš (6.24) ir (6.25) išplaukia

$$|x_{n+1} - x_n| \le \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|. \qquad (6.26)$$

Pritaikę šią nelygybę dar $n-1$ kartą, gausime

$$|x_{n+1} - x_n| \le \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|x_{n-1} - x_{n-2}| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_1 - x_0|. \qquad (6.27)$$

Dabar galime įvertinti skirtumą $|x_m - x_n|$. Paimkime $m = n + p$. Įvertinkime

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + x_{n+p-2} - ... + x_{n+1} - x_n| \\
&\le |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + ... + |x_{n+1} - x_n| \\
&\le \frac{1}{2^{n+p-1}}|x_1 - x_0| + \frac{1}{2^{n+p-2}}|x_1 - x_0| + ... + \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0| \\
&= \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0|\left(\frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-2}} + ... + 1\right) \\
&\le \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0| 2 = \frac{1}{2^{n-1}}|x_1 - x_0|
\end{aligned} \qquad (6.28)$$

Matome, kad galutiniame reiškinyje nėra kintamojo p ir kad galutinis įvertis priklauso tik nuo n. Kai n auga į begalybę, tas įvertis artėja į nulį. Vadinasi,

$$\forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \exists N; \forall p, p \in \mathbb{N}, \forall n, n > N \Rightarrow |x_n - x_{n+p}| < \frac{1}{2^{n-1}}|x_1 - x_0| < \varepsilon \qquad (6.29)$$

Įrodėme, kad seka $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$, $x_0 > \sqrt{c}$, tenkina Koši sąlygą. Tada $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Perėję prie ribos lygybėje (6.15) ir pakartoję veiksmus (6.16) gauname

$$\alpha = \sqrt{c}.$$

Mes išnagrinėjome labai rimtą pavyzdį, kuriame veikia Koši kriterijus. Patikrinti Koši sąlygą nebuvo labai paprasta. Konkrečiu pavyzdžiu mes pademonstravome vieną fundamentaliausių matematinės analizės teoremų. Ateityje dažnai naudosimės Koši kriterijumi. Tai bus vienas svarbiausių įrankių, garantuojantis ribos egzistavimą. Matematikoje pirmiausia išsiaiškinama objekto egzistencija, po to tiriamos jo savybės, o galiausiai ieškomas ir pats objektas.

Užduotis 6.2. Pritaikykite Koši kriterijų sekai $x_{n+1} = qx_n + a$, čia q ir a – realieji skaičiai. Kaip konvergavimas priklauso nuo parametrų q, a, x_0? Seka nusakyta kaip ir geometrinės progresijos sumų seka, tik parametras a neturi pradinio nario prasmės.

Užduotis 6.3. Sugalvokite n-tojo laipsnio šaknies radimo algoritmą ir trimis būdais įrodykite jo konvergavimą. Tai sunki užduotis.

Pavyzdys 6.2. Atvirkštinio skaičiaus algoritmas.

Kaip skaičiuoklis skaičiuoja atvirkštinį skaičių, t.y. kiekvienam $c, c > 0$, suranda $c^{-1} = \frac{1}{c}$. Mes turėtume žinoti, kad elektronika ar integralinės schemos atlieka tik sudėties ir daugybos veiksmus (dar loginius veiksmus). Pabandysime samprotauti, kaip ir kvadratinės šaknies radimo algoritme. Parašykime lygtį. $x = \frac{1}{c}$. Ją galime pertvarkyti

$$c = \frac{1}{x}, c - \frac{1}{x} = 0, x - \frac{1}{c} = 0, \frac{1}{x} - c = 0.$$

Kuri iš šių lygčių tinka? Pasirinkime paskutiniąją. Pažymėkime $f(x) = \frac{1}{x} - c$ ir nubrėžkime funkcijo grafiką. Jis yra žinomas iš vidurinės mokyklos kurso.

Lygties $\frac{1}{x} - c = 0$ sprendinys ir bus $\frac{1}{c}$. Pasirenkame x_0 tokį, kad $x_0 > 0$ ir $\frac{1}{x_0} - c > 0$.

Parašome liestinės lygtį

$$\begin{aligned} y &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \\ y &= \frac{1}{x_0} - c - \frac{1}{x_0^2}(x - x_0). \end{aligned} \tag{6.30}$$

Surandame liestinės susikirtimo tašką su abscise

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{x_0} - c - \frac{1}{x_0^2}(x - x_0), \\ x &= x_0(2 - cx_0). \end{aligned}$$

Pažymėkime šią reikšmę x_1, t.y.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0(2 - cx_0), \ldots, \\ x_{n+1} &= x_n(2 - cx_n). \end{aligned} \tag{6.31}$$

Nubrėžkime šiai sekai “voratinklį”. Tam reikia nubrėžti tiesę $y = x$ ir parabolę $y = x(2-cx)$. Iš “voratinklio” matyti, kad seka didėja ir konverguoja į reikšmę, nusakytą tiesės $y = x$ ir parabolės $y = x(2-cx)$ susikirtimu. Monotoniškų sekų teorema garantuoja ribos egzistavimą. Koši kriterijaus taikymas (panašiai, kaip kvadratinės šaknies algoritme) leistų įvertinti, kaip greitai konverguoja.
Pažymėkime $g(x) = x(2-cx)$. Pabandykime įvertinti skirtumą

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= g(x_n) - g(x_{n-1}) \\ &= x_n(2-cx_n) - x_{n-1}(2-cx_{n-1}) \\ &= 2(x_n - x_{n-1}) - c(x_n^2 - x_{n-1}^2) \\ &= 2(x_n - x_{n-1}) - c(x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1}) \\ &= (x_n - x_{n-1})(2 - c(x_n + x_{n-1})) \end{aligned} \tag{6.32}$$

Būtų gerai, jei antrasis daugiklis būtų kiek galima mažesnis. Jis bus mažas, kai x_n bus arti $1/c$ ir bus didelis, jei arti nulio. Paimkime $\frac{3}{4c} \le x_0 \le \frac{1}{c}$. Tada x_1 ir visi kiti sekos nariai tenkins tą pačią nelygybę. Tada

$$\begin{aligned} &c(x_n + x_{n-1}) \ge c\left(\frac{3}{4c} + \frac{3}{4c}\right) = \frac{3}{2}, \\ &0 \le 2 - c(x_n + x_{n-1}) \le 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Gavome nelygybę

$$|x_{n+1} - x_n| \le \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|. \tag{6.34}$$

Mes tokią nelygybę (6.26) jau buvome sutikę anksčiau. Ji garantuoja Koši sąlygą , taigi ir sekos konvergavimą.
Dabar susiesime Koši kriterijų su kitomis egzistencijos teoremomis.
Teiginys 6.2. Jei teisingas Koši kriterijus, tai teisinga ir susitraukiančiųjų intervalų lema.
Duota:
1) Intervalų $I_n = [a_n, b_n]$ seka, tenkinanti sąlygas
   a) $I_{n+1} \subseteq I_n$ arba $a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n, \forall n$
   b) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$
2) Teisinga: jei seka $\{x_n\}$ tenkina Koši sąlygą, tai $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Įrodyti: Egzistuoja vienintelis $\alpha, \alpha \in I_n, \forall n$, arba $a_n \le \alpha \le b_n$.
Įrodymas. Jei paimsime $m, m > n,$ tai $a_n \le a_m < b_m \le b_n$. Iš čia

$$\begin{aligned} &|b_m - b_n| < |b_n - a_n|, \\ &|a_m - a_n| < |b_n - a_n|. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Kadangi seka $\{b_n - a_n\}$ artėja į nulį, tai sekos $\{a_n\}, \{b_n\}$ tenkina Koši sąlygą. Vadinasi, egzistuoja jų ribos. Tolimesnis įrodymas visiškai toks pat, koks buvo įrodymas, remiantis monotoniškų aprėžtų sekų ribų egzistavimu.