# 5. ELEMENTARIOS SEKŲ RIBŲ SAVYBĖS

Teiginys 5.1. Jei $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$, tai $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

Įrodymas. Reikia įvertinti skirtumą $|(x_n + y_n) - (a+b)|$. Mokame įvertinti skirtumus $|x_n - a|, |y_n - b|$. Galime pasinaudoti realiųjų skaičių trikampio nelygybe

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a+b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \\ &\le |x_n - a| + |y_n - b| \end{aligned} \tag{5.1}$$

Skirtumas kairėje (5.1) pusėje bus mažesnis už $\varepsilon$, jei paskutiniųjų dviejų skirtumų suma bus mažesnė už $\varepsilon$. Tai bus tada, kai kiekvienas iš paskutiniųjų skirtumų bus mažesnis už $\frac{\varepsilon}{2}$. Remiantis teiginio sąlyga, galima teigti, kad egzistuoja tokie $N_1$ ir $N_2$, jog

$$n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kai $n > N, N = \max\{N_1, N_2\}$, bus teisingos abi nelygybės, taigi, ir

$$|(x_n + y_n) - (a+b)| < \varepsilon.$$

Pastaba. Teiginyje sumos ženklą galima pakeisti skirtumo ženklu.

Teiginys 5.2. Jei $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$, tai $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$

Įrodymas. Reikia skirtumą $|x_n y_n - ab|$ išreikšti per skirtumus $|x_n - a|, |y_n - b|$. Tam matematikai turi sugalvoję triukų:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n(y_n - b + b) - ab| \\ &= |x_n(y_n - b) + x_n b - ab| \\ &= |x_n(y_n - b) + (x_n - a)b| \\ &\le |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b| \end{aligned} \tag{5.2}$$

Antrąjį dėmenį paskutiniojoje (5.2) nelygybėje galime paprastai įvertinti, o pirmajame yra dar kintamasis – pati seka $\{x_n\}$. Sekantis (trečiasis) teiginys tvirtina, kad konverguojanti seka yra aprėžta, t.y. egzistuoja tokia konstanta *M*, kad $|x_n| \le M, \forall n.$
Toliau galime samprotauti kaip ir pirmajame teiginyje:
Skirtumas kairiojoje (5.2) nelygybės pusėje bus mažesnis už $\varepsilon$, jei paskutiniųjų dviejų dėmenų suma bus mažesnė už $\varepsilon$. Tai bus tada, kai kiekvienas iš paskutiniųjų dėmenų bus mažesnis už $\frac{\varepsilon}{2}$. Remiantis teiginio sąlyga, galima tvirtinti, kad egzistuoja tokie $N_1$ ir $N_2$, jog

$$n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|} \Rightarrow |b||x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow |x_n||y_n - b| \le M\,|y_n - b| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kai $n > N, N = \max\{N_1, N_2\}$, bus teisingos abi nelygybės. Taigi, ir $|x_n y_n - ab| < \varepsilon.$

Teiginys 5.3. Konverguojanti seka $\{x_n\}$ yra aprėžta, t.y. egzistuoja tokia konstanta *M*, kad $|x_n| \le M, \forall n.$

Įrodymas. Sakykime, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Tada, paėmę konkretų $\varepsilon$, pvz., $\varepsilon = 1$, galime rasti tokį $N$, kad

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < 1 \Leftrightarrow a - 1 < x_n < a + 1.$$

Yra baigtinis skaičius sekos narių $x_1, x_2, ..., x_{\lfloor N \rfloor}$, o kiti sekos nariai yra intervale $(a-1; a+1)$. Taigi galime tvirtinti, kad visiems natūraliesiems $n$ $|x_n| \le M, M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{\lfloor N \rfloor}|, |a-1|, |a+1|\}$.

Teiginys 5.4. Jei $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b, b \ne 0,$ tai $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Įrodymas. Reikia įvertinti skirtumą $\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right|$ per skirtumus $|x_n - a|, |y_n - b|$. Tam vėl naudosime panašų triuką, kaip sekų sandaugai

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| = \frac{|(x_n - a + a)b - y_n a|}{|y_n b|} = \frac{|(x_n - a)b + ab - y_n a|}{|y_n b|} \\ &\le \frac{|(x_n - a)b|}{|y_n b|} + \frac{|a(b - y_n)|}{|y_n b|} = \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|a(b - y_n)|}{|y_n b|}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Pastarųjų dėmenų skaitiklius mokame įvertinti, bet vardikliuose yra seka, kuri kintama. Jei sekos riba yra ne nulis, tai sekos nariai nuo tam tikro $N$ yra aprėžti moduliu iš apačios tam tikra konstanta (sekantis teiginys), t.y. egzistuoja tam tikra konstanta, pvz. $\frac{|b|}{2}$, ir toks $N$, kad

$$n > N \Rightarrow |y_n| \ge \frac{|b|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|y_n|} \le \frac{2}{|b|}. \tag{5.4}$$

$$\frac{|x_n - a|}{|y_n|} < \frac{\varepsilon}{2} \Leftarrow \begin{cases} \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|} \Leftarrow n > N, \\ |x_n - a| < \frac{\varepsilon|b|}{4} \Leftarrow n > N_1 \end{cases} \Leftarrow n > \max\{N, N_1\}, \tag{5.5}$$

$$\frac{|a(b - y_n)|}{|y_n b|} < \frac{\varepsilon}{2} \Leftarrow \begin{cases} \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|} \Leftarrow n > N, \\ |b - y_n| < \frac{\varepsilon|b|^2}{4|a|} \Leftarrow n > N_2 \end{cases} \Leftarrow n > \max\{N, N_2\}. \tag{5.6}$$

Vieną sykį reikėjo dalinti iš $|a|$. Jei tai būtų lygu nuliui, tai dalinti negalėtume, bet tada kairiojoje nelygybės (5.6) pusėje būtų nulis ir nelygybė būtų visada teisinga.

Teiginys 5.5. Jei $\lim_{n\to\infty} x_n = a, a \ne 0$, tai bet kokiam $\delta, |a| > \delta > 0$, egzistuoja toks $N$, kad

$$n > N \Rightarrow |x_n| > \delta.$$

Įrodymas. Sakykime, $a > 0$. Tada paimkime $\delta, a > \delta > 0$, ir apibrėžkime $\varepsilon = a - \delta$. Pagal sekos ribos apibrėžimą egzistuoja toks $N$,

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a + \varepsilon > x_n > a - \varepsilon = a - (a - \delta) = \delta.$$

Jei $a < 0$, tai įrodymas analogiškas.

Teiginys 5.6. Jei $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$ ir $x_n \le y_n, \forall n$, tai $a \le b$.

Įrodymas. Tai elementarus įrodymas prieštaros būdu. Sakykime, $a > b$. Apibrėžkime $\varepsilon = \frac{1}{3}(a-b)$. Svarbu, kad būtų $b+\varepsilon < a-\varepsilon$. Tada

$$\begin{aligned}
&\exists N_1, n > N_1 \Rightarrow a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon,\\
&\exists N_2, n > N_2 \Rightarrow b-\varepsilon < y_n < b+\varepsilon,\\
&n > \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow y_n < b+\varepsilon < a-\varepsilon < x_n.
\end{aligned}$$

Tai prieštarauja teiginio sąlygai.

Pastaba. Jei teiginio formuluotėje būtų griežtas nelygybės ženklas, tai vis tiek tvirtinime lieka ženklas "≤". Pavyzdys. $x_n = -\frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n}, x_n < y_n$, bet

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Teiginys 5.7. Jei $x_n \le y_n \le z_n, \forall n$, ir $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, tai ir $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a.$

Šitas teiginys rusiškoje literatūroje vadinamas dviejų milicininkų (policininkų) principu, o angliškoje – sumuštinio (sandwich).

Įrodymas. Bet kokiam $\varepsilon, \varepsilon > 0,$

$$\begin{aligned}
&\exists N_1, n > N_1 \Rightarrow a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon,\\
&\exists N_2, n > N_2 \Rightarrow a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon,\\
&n > \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow a-\varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a+\varepsilon.\\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = a.
\end{aligned}$$

Teiginys 5.8. Jei $x_n \le y_n, \forall n,$ ir $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, tai $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

Įrodymas. Patikrinama pagal apibrėžimą. Pasirenkame bet kokį $E$. Egzistuoja toks $N$, kad $n > N \Rightarrow \begin{cases} E < x_n, \\ x_n \le y_n \end{cases} \Rightarrow E < y_n.$

Teiginys 5.9. Jei seka $\{x_n\}$ monotoniška ir koks nors jos posekis $\{x_{n_k}\}$ konverguoja, tai ir pati seka konverguoja ir jos riba yra lygi posekio ribai.

Įrodymas. Sakykime, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ ir seka yra didėjanti. Tada bet kokiam $\varepsilon, \varepsilon > 0,$ egzistuoja toks $K$, kad $k > K \Rightarrow a-\varepsilon < x_{n_k} \le a$. Paėmę mažiausią $k_0$, tenkinantį nelygybę $k_0 > K$, galime apibrėžti $N = n_{k_0}$. Tada $n > N \Rightarrow x_n \ge x_N = x_{n_{k_0}} > a-\varepsilon.$ Bet visi sekos nariai $x_n \le a$. Jei būtų priešingai, t.y. atsirastų toks $n$, kad būtų $x_n > a$, tai atsirastų ir toks $k$, kad $n_k > n$ ir $x_{n_k} \ge x_n > a$. Taip būti negali.

Pastaba. Teiginys teisingas ir kai ribos begalinės (sekos – monotoniškos).

Teiginys 5.10. Jei sekos $\{x_n\}$ posekiai $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}$ konverguoja į tą pačią ribą, tai ir pati seka konverguoja į tą patį skaičių.

Tokį teiginį kiekvienas turi sugebėti įrodyti pats.

Kai kurie paprasčiausių ribų savybių taikymai.

Pavyzdys 5.1. Pereitame skyrelyje nagrinėjome dvi sekas

$$\begin{aligned}
&x_n = \left(1+\frac{i}{n}\right)^n,\\
&y_n = 1+i+\frac{i^2}{2!}+\ldots+\frac{i^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Buvo įrodyta, kad $x_n \le y_n$, o seka $\{y_n\}$ aprėžta. Akivaizdu, kad seka $\{y_n\}$ didėjanti (kai $i$ teigiamas). Abi sekos didėjančios ir aprėžtos. Vadinasi, abi konverguoja ir

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n \qquad (5.7)$$

Įrodysime, kad šios ribos lygios. Apibrėžkime naują seką

$$z_{n,k} = 1 + i + \frac{i^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{i^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right), k < n. \qquad (5.8)$$

Teisingos nelygybės

$$z_{n,k} \le x_n \le y_n\,. \qquad (5.9)$$

Pereikime nelygybėse (5.9) prie ribos, kai $n \to \infty$. Gausime

$$\lim_{n\to\infty} z_{n,k} \le \lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n. \qquad (5.10)$$

Dabar apskaičiuokime sekos $\{z_{n,k}\}$ ribą

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} z_{n,k} &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + i + \frac{i^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{i^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) \\ &= 1 + i + \frac{i^2}{2!} + \ldots + \frac{i^k}{k!} = y_k.\end{aligned} \qquad (5.11)$$

Įstatę rezultatą (5.11) į nelygybę (5.10), gauname nelygybę

$$y_k \le \lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n\,, \qquad (5.12)$$

kuri teisinga visiems natūraliesiems *k*. Antrasis ir trečiasis nariai nelygybėje (5.12) yra konstantos. Pereikime šioje nelygybėje prie ribos, kai $k \to \infty$. Gausime

$$\lim_{k\to\infty} y_k \le \lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n. \qquad (5.13)$$

Pirmasis ir trečiasis nariai šioje nelygybėje yra lygūs, nežiūrint to, kad kintamieji pažymėti skirtingomis raidėmis. Vadinasi, sekų $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ ribos yra lygios. Tai užtvirtinsime vaizdingiau:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{1!}+\frac{i^2}{2!}+\ldots+\frac{i^n}{n!}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{i^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}, i \ge 0.\end{aligned} \qquad (5.14)$$

<u>Pavyzdys 5.2. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$</u>

Aišku, kad $\sqrt[n]{n} > 1$. Galime pažymėti

$$\begin{aligned}&\sqrt[n]{n} = 1 + a_n, a_n > 0, \\ &n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = \left(1+a_n\right)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2!}a_n^2 + \ldots + a_n^n \\ &\ge \frac{n(n-1)}{2!}a_n^2, \\ &a_n^2 \le \frac{2}{n-1}, n > 1, \\ &a_n \le \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0, n \to \infty, \\ &1 \le \sqrt[n]{n} \le 1 + a_n, \\ &\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.\end{aligned}$$

Pavyzdys 5.3. Pereitame skyrelyje nagrinėjome kaupimo funkcijos, kai palūkanos perskaičiuojamos nuolat, reikšmę taške $t=1/2$. Įrodėme, kad

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n+1}\left(\frac{1}{2},i\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^{n}=e^{\frac{1}{2}i}. \tag{5.15}$$

Uždavinyje 4.2 reikėjo įrodyti, kad, apibrėžę funkciją

$$A_{2n+1}\left(\frac{1}{2},i\right)=\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^{n+1} \tag{5.16}$$

kitaip, ribą turėtume gauti tokią pat. Kaupimo funkcija $A_{2n+1}(t,i)$, kai palūkanos perskaičiuojamos $2n+1$ kartą, turi būti didėjanti funkcija (tai bet kokios kaupimo funkcijos savybė). Šios funkcijos reikšmės vienareikšmiškai apibrėžtos perskaičiavimo taškuose, t.y.

$$\begin{aligned} A_{2n+1}\left(\frac{n}{2n+1},i\right)&=\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^{n}, \\ A_{2n+1}\left(\frac{n+1}{2n+1},i\right)&=\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^{n+1}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Vadinasi,

$$\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^{n}\le A_{2n+1}\left(\frac{1}{2},i\right)\le\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^{n+1}. \tag{5.18}$$

Pastarojoje nelygybėje perėję prie ribos ir pasinaudoję dviejų policininkų principu (teiginys 5.7), gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n+1}\left(\frac{1}{2},i\right)=e^{\frac{1}{2}i} \tag{5.19}$$

nepriklausomai nuo to, kaip konkrečiai mes apibrėšime kaupimo funkcijos reikšmę $A_{2n+1}\left(\frac{1}{2},i\right)$.