4. PALŪKANŲ NUOLATINIS SKAIČIAVIMAS. SKAIČIUS “e”

Finansų matematika. Pereitame skyrelyje susipažinome su keletu sąvokų – nominaliąja ir efektyviąja palūkanų normomis. Matėme, kad kaupimo funkcija ir efektyvioji palūkanų norma didėja, kai perskaičiavimų skaičius didėja. Kyla klausimas, ar i_{eff} ir $A_m(1)=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$ artėja į kokią nors ribą ar didėja neaprėžtai. Laikysime, kad nominalioji palūkanų norma $i^{(m)}$ nekinta. Tada indeksą *m* praleisime. Norint pasiremti monotoniškų aprėžtų sekų ribų savybe, reikia išsiaiškinti, ar aprėšta seka $x_m = A_m(1)=\left(1+\frac{i}{m}\right)^m$. Prisiminkime sekos $\{x_n\}$ monotoniškumo įrodymą:

$$\begin{aligned}
x_n &= 1+i+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)i^2+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)i^3+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)i^n \\
&< 1+i+\frac{1}{2!}i^2+\frac{1}{3!}i^3+\ldots+\frac{1}{n!}i^n \\
&< 1+i+\frac{1}{2}i^2+\frac{1}{2^2}i^3+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}i^n \\
&= 1+i\left(1+\frac{i}{2}+\left(\frac{i}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\right) \\
&= 1+i\frac{1-\left(\frac{i}{2}\right)^n}{1-\frac{i}{2}} \\
&< 1+i\frac{1}{1-\frac{i}{2}} \\
&= 1+\frac{2i}{2-i},
\end{aligned} \tag{1}$$

jei $0<i<2$. Gavome, kad seka $\{x_n\}$ aprėžta. Vadinasi, remiantis monotoniškų ir aprėžtų sekų savybe, seka konverguoja. Ypatingai svarbi ši riba, kai parametras $i=1$. Tada ta riba turi specialų žymėjimą, kurį pirmą sykį panaudojo Leonardas Oileris (Leonard Euler, 1707-1783)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{2}$$

Tai viena svarbiausių matematinių konstantų. Jos apytikslė reikšmė $e=2.718281828$. Ji pasirodo daugelyje uždavinių.
Pažymėkime

$$y_n = 1+i+\frac{i^2}{2!}+\ldots+\frac{i^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{i^k}{k!}. \tag{3}$$

Užduotis 4.1. Įrodykite, kad seka $\{y_n\}$ aprėžta, kai $i<3, i<4$, o po to ir bet kokiam teigiamam *i*.
Kai nominali palūkanų norma yra i, o palūkanos perskaičiuojamos nuolat, tai kaupimo funkciją po vieno periodo natūralu apibrėžti taip

$$A(1,i)=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^m. \tag{4}$$

Kad nekiltų dviprasmiškumų, kaupimo funkcijai įvedėme antrąjį argumentą. Pasinaudoję tik ką įvestu skaičiaus *e* apibrėžimu, gauname, kad $A(1,1)=e$. Įdomu, koks ryšys funkcijos $A(1,i)$ su skaičiumi *e*.Tai gana įdomus uždavinėlis. Pradžiai laikykime, kad $i=\frac{1}{2}$. Tada

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)^m\left(1+\frac{1}{2m}\right)^m=\left(1+\frac{1}{2\cdot m}\right)^{2m}. \tag{5}$$

Dešiniojoje (5) lygybės pusėje yra sekos $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ posekis $\{x_{2m}\}$ ir jis konverguoja į *e*. Seką kairiojoje lygybės pusėje reikia perrašyti truputį kitaip

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)^m=\left(1+\frac{1/2}{m}\right)^m.$$

Gavome pažįstamą seką su $i=1/2$. Žinome, kad ji didėjanti ir aprėžta, taigi konverguoja. Tada galima pereiti prie ribos ankstesnėje lygybėje

$$\begin{gathered}\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2m}\right)^m\left(1+\frac{1}{2m}\right)^m=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2\cdot m}\right)^{2m},\\ \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2m}\right)^m\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2m}\right)^m=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2\cdot m}\right)^{2m},\\ A\left(1,\frac{1}{2}\right)A\left(1,\frac{1}{2}\right)=e,\\ A\left(1,\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.\end{gathered} \tag{6}$$

Panagrinėkime bendresnį atvejį, kai $i=\frac{1}{k}$. Tada analogiškai

$$\begin{gathered}\underbrace{\left(1+\frac{1}{k\cdot m}\right)^m\left(1+\frac{1}{k\cdot m}\right)^m\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{k\cdot m}\right)^m}_{k}=\left(1+\frac{1}{k\cdot m}\right)^{km},\\ \lim_{m\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{k\cdot m}\right)^m\left(1+\frac{1}{k\cdot m}\right)^m\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{k\cdot m}\right)^m}_{k}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{k\cdot m}\right)^{km},\\ \underbrace{A\left(1,\frac{1}{m}\right)A\left(1,\frac{1}{m}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(1,\frac{1}{m}\right)}_{k}=e,\\ A\left(1,\frac{1}{m}\right)=e^{\frac{1}{k}}=\sqrt[k]{e}.\end{gathered} \tag{7}$$

Sakykime, $i=\frac{p}{k}$, čia *p* ir *k* – natūralieji skaičiai. Be to, $0\le p\le 2k$. (Mes kol kas esame įrodę, kad $A(1,i)$ egzistuoja, kai $i<2$.) Tada

$$
\begin{aligned}
A(1,i) &= A\left(1,\frac{p}{k}\right) \\
&= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{p}{k\cdot m}\right)^{m} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{k\cdot np}\right)^{np} \\
&= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{k\cdot n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{k\cdot n}\right)^{n}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{k\cdot n}\right)^{n}}_{p} = \underbrace{e^{\frac{1}{k}}e^{\frac{1}{k}}\cdot\ldots\cdot e^{\frac{1}{k}}}_{p} \\
&= \left(e^{\frac{1}{k}}\right)^{p} = e^{\frac{p}{k}} = e^{i}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Pasinaudojome tuo, kad jei seka $\{x_m\}$ konverguoja, tai bet koks jos posekis $\{x_{np}\}$ (čia $m = np$, p- fiksuotas natūralusis skaičius, o n – kintamas) taip pat konverguoja į tą pačią ribą. Mes skaičiavome kaupimo funkcijos reikšmę taške 1, t.y. lygiai po vieno periodo. Gavome labai įdomų grynai matematinį rezultatą: kai i yra racionalusis skaičius, mažesnis už 2 (šitą sąlygą galima atmesti pasiremiant uždavinio 4.3 rezultatu), tai

$$
\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} = e^{i}. \tag{9}
$$

Suskaičiavome kaupimo funkcijos reikšmę po metų, jei palūkanos perskaičiuojamos nuolat. Kaip atrodytų tokia kaupimo funkcija bet kokiu laiko momentu t? Problema apskaičiuoti tokią kaupimo funkciją yra ta, kad, perskaičiuojant palūkanas m kartų per metus, funkcijos reikšmė vienareikšmiškai yra apibrėžta tik perskaičiavimo momentais, t.y. $\frac{1}{m},\frac{2}{m},\ldots,\frac{k}{m},\ldots,\frac{m}{m}$. Apibrėžti funkcijos reikšmę tarpinėse reikšmėse galima įvairiais būdais. Sekanti kaupimo funkcija vėl vienareikšmiškai apibrėžiama kitais momentais - $0,\frac{1}{m+1},\frac{2}{m+1},\ldots,\frac{k}{m+1},\ldots,\frac{m+1}{m+1}$. Todėl iškyla techninių sunkumų, kuriuos atidėsime ateičiai. Tačiau problemos suvokimui panagrinėkime kaupimo funkcijos, kai palūkanos perskaičiuojamos nuolat, reikšmę laiko momentu $t = \frac{1}{2}$. Jei m yra lyginis, t.y. $m = 2n,$ tai

$$
A_m\left(\frac{1}{2},i\right) = A_{2n}\left(\frac{1}{2},i\right) = \left(1+\frac{i}{2n}\right)^{n}. \tag{10}
$$

Jei m nelyginis, t.y. $m = 2n+1$, tai kaupimo funkciją taške $t = \frac{1}{2}$ galima apibrėžti taip

$$
A_m\left(\frac{1}{2},i\right) = A_{2n+1}\left(\frac{1}{2},i\right) = \left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^{n}. \tag{11}
$$

Reikėtų įrodyti, kad taip apibrėžta seka konverguoja. Jei ji konverguoja, tai gautą ribą natūralu būtų laikyti ieškoma kaupimo funkcija $A\left(\frac{1}{2},i\right)$, kai palūkanos perskaičiuojamos nuolat. Apskaičiuosime lyginių ir nelyginių narių posekių ribas. Galime parašyti paprastą lygybę

$$
\left(1+\frac{i}{2n}\right)^{n}\left(1+\frac{i}{2n}\right)^{n} = \left(1+\frac{i}{2n}\right)^{2n}. \tag{12}
$$

Sekos šioje lygybėje didėjančios ir aprėžtos. Todėl jos turi ribas. Lygybėje (12) galima pereiti prie ribos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{2n}\right)^n\left(1+\frac{i}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{2n}\right)^{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty}A_{2n}\left(\frac{1}{2},i\right)\lim_{n\to\infty}A_{2n}\left(\frac{1}{2},i\right)=e^i, \tag{13}$$

$$\lim_{n\to\infty}A_{2n}\left(\frac{1}{2},i\right)=\sqrt{e^i}=e^{\frac{1}{2}i}.$$

Nelyginiams nariams vėl parašome akivaizdžią lygybę

$$\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^n\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^n\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)=\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^{2n+1}. \tag{14}$$

Turime tris sekas:

$$a_n=\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^n, b_n=1+\frac{i}{2n+1}, c_n=\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^{2n+1}. \tag{15}$$

Žinome, kad $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1, \lim\limits_{n\to\infty}c_n=e.$ Ką galime pasakyti apie seką $\{a_n\}$? Ji aprėžta

$$a_n=\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^n<\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^{2n+1}=c_n.$$

Ar seka $\{a_n\}$ didėjanti? Galima ją išreikšti per kitas sekas:

$$a_n=\sqrt{c_n\frac{1}{b_n}}. \tag{16}$$

Seka $\{c_n\}$ didėjanti, seka $\{b_n\}$ mažėjanti, todėl seka $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ didėjanti. Didėjanti bus ir sekų sandauga, esanti pošaknyje, o taip pat ir pati seka $\{a_n\}$. Vadinasi, seka $\{a_n\}$ turi ribą. Galima pereiti prie ribos (14) lygybėje:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^n\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^n\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{2n+1}\right)^{2n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}A_{2n+1}\left(\frac{1}{2},i\right)\lim_{n\to\infty}A_{2n+1}\left(\frac{1}{2},i\right)\cdot 1=e^i, \tag{17}$$

$$\lim_{n\to\infty}A_{2n+1}\left(\frac{1}{2},i\right)=\sqrt{e^i}=e^{\frac{1}{2}i}.$$

Įrodėme, kad lyginių narių posekis $A_{2m}\left(\frac{1}{2},i\right)$ ir nelyginių narių posekis $A_{2m+1}\left(\frac{1}{2},i\right)$ konverguoja į tą pačią ribą $e^{\frac{1}{2}i}$. Todėl ir visa seka konverguoja į tą pačią ribą, t.y.

$$\lim_{n\to\infty}A_n\left(\frac{1}{2},i\right)=e^{\frac{1}{2}i}. \tag{18}$$