3. SEKOS RIBA. GEOMETRINĖ PROGRESIJA

Realieji skaičiai. Mes laikysime, kad egzistuoja tokie skaičiai, kuriuos vadiname realiaisiais skaičiais. Su jais mokame atlikti du aritmetinius veiksmus – sudėtį ir atimtį. Šie veiksmai tenkina tam tikras savybes, kurias įprasta vadinti aksiomomis. Be to, realiuosius skaičius mokame palyginti, t. y. pasakyti,kuris iš dviejų yra didesnis, mažesnis arba jie yra lygūs. Pagrindinis skirtumas tarp realiųjų ir racionaliųjų skaičių yra ta, kad realieji skaičiai yra pilnoji aibė. Pilnumo sąvoka geriausiai pasireiškia kalbant apie ribas. Todėl nuo ribų ir pradėsime. Riba irgi neatsiranda iš dangaus, bet sprendžiant konkrečius uždavinius. Pirmasis uždavinys bus susijęs su geometrine progresija. Geometrinė progresija yra gana turiningas objektas.

1. **Geometrinės progresijos apibrėžimas. Sumos formulė.** Tai žinomas objektas iš vidurinės mokyklos.

Apibrėžimas. Sakysime, kad skaičiai $b_0, b_1, b_2, ..., b_n, ...$ sudaro geometrinę progresiją, jei $b_{n+1} = b_n \cdot q$ visiems $n = 0,1,2,...$, o q kažkoks pastovus skaičius. Jis vadinamas progresijos vardikliu. Su geometrine progresija yra susijję du uždaviniai:

1. Rasti išreikštinę n-tojo nario b_n formulę,
2. Rasti sumos $s_n = b_0 + b_1 + ... + b_n$ formulę.

Pirmasis uždavinys – tai pats paprasčiausias matematinės indukcijos taikymas. Atsakymas visiems gerai žinomas $b_n = b_0 q^n$ arba $b_n = b_1 q^{n-1}$. Skirtumas atsiranda dėl to, nuo kokio nario pradedame progresiją. Dažnai patogu pradėti nuo nulio.
Žinodami geometrijos progresijos n-tojo nario formulę, sumavimo uždavinį galime performuluoti:

$$\begin{aligned} s_n &= b_0 + b_1 + ... + b_n \\ &= b_0 + b_0 q + ... + b_0 q^n \\ &= b_0 (1 + q + ... + q^n). \end{aligned}$$

Taigi užtenka rasti paprastesnę sumą: $s_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$. Ją apskaičiuosime keletu būdų.

<u>Baigtinių skirtumų metodas</u>. Prisiminsime idėją, kurią taikėme binominių koeficientų skyriuje. Reikia q^k užrašyti kaip $g(k+1) - g(k)$. Jei pabandytume imti $g(k) = q^k$, tai gautume:

$$\begin{aligned} g(k+1) - g(k) &= q^{k+1} - q^k \\ &= q^k (q-1). \end{aligned}$$

Matome, kad gavome beveik tai, ko norėjome. Trukdo tik daugiklis (q-1), kuris nepriklauso nuo k. Todėl galima iš jo padalinti: $g(k) = \dfrac{q^k}{q-1}$. Dabar:

$$\begin{aligned} g(k+1) - g(k) &= \frac{q^{k+1}}{q-1} - \frac{q^k}{q-1} \\ &= \frac{q^{k+1} - q^k}{q-1} = \frac{q^k (q-1)}{q-1} = q^k. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$
\begin{aligned}
s_n &= 1+q+q^2+\ldots+q^n\\
&= (g(1)-g(0))+(g(2)-g(1))+\ldots+(g(n+1)-g(n))\\
&= g(n+1)-g(0)\\
&= \frac{q^{n+1}}{q-1}-\frac{q^0}{q-1}\\
&= \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.
\end{aligned}
$$

<u>Kitas būdas.</u> Tą pačią sumą $s_{n+1}=b_0+b_1+\ldots+b_n+b_{n+1}$ išreikšime dviem būdais:

$$
\begin{aligned}
s_{n+1} &= s_n+b_{n+1},\\
s_{n+1} &= b_0+qb_0+qb_1+\ldots+qb_{n-1}+qb_n\\
&= b_0+q(b_0+b_1+\ldots+b_n)\\
&= b_0+qs_n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&s_n+b_{n+1}=qs_n+b_0,\\
&s_n(1-q)=b_0-b_{n+1},\\
&s_n=\frac{b_0-b_{n+1}}{1-q}=\frac{b_0-b_0q^{n+1}}{1-q}=\frac{b_0(1-q^{n+1})}{1-q}.
\end{aligned}
$$

Beje, antroji sumos išraiška $s_{n+1}=b_0+qs_n$ yra įdomi pati savaime. Ji labai panaši į geometrinės progresijos apibrėžimą.

2. **Finansų matematika.** <u>Sudėtinės palūkanos</u>.

Sąvokos:

- Palūkanų norma (angl. interest rate) i – piniginio vieneto prieaugis per periodą (periodas dažniausiai būna vieneri metai).
- Kaupimo funkcija (angl. accumulation factor) $A(t)$ – piniginio vieneto sukauptoji vertė laiko momentu t. Gali būti, kad laikas t gali įgyti tik reikšmes $0,1,2,3,\ldots$. Aišku, kad $A(0)=1$, nes piniginis vienetas laiko momentu nulis dar nepasikeitė. Tada

$$
\begin{aligned}
&A(1)=1+i,\\
&A(2)=A(1)\cdot(1+i)=(1+i)(1+i)=(1+i)^2,\\
&A(3)=A(2)\cdot(1+i)=(1+i)^2(1+i)=(1+i)^3,\\
&\ldots\\
&A(n)=A(n-1)\cdot(1+i)=(1+i)^n.
\end{aligned}
$$

- Nominalioji palūkanų norma – piniginio vieneto prieaugis per metus, tariant, kad palūkanos skaičiuojamos tik vieną kartą metų pabaigoje.

Jei palūkanos skaičiuojamos m kartų per metus, tai nominalioji palūkanų norma žymima $i^{(m)}$. Tada kaupimo funkcija laiko momentais $\frac{1}{m},\frac{2}{m},\ldots,\frac{k}{m}$ atrodys taip

$$
\begin{aligned}
&A\left(\frac{1}{m}\right)=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right),\\
&A\left(\frac{2}{m}\right)=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2,\\
&\ldots,\\
&A\left(\frac{k}{m}\right)=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^k
\end{aligned}
$$

- Efektyvioji (P.Katauskis -faktinė, A.Bakštys -veiksmingoji) palūkanų norma (angl. effective rate of interest) i_{eff} – piniginio vieneto prieaugis per pirmuosius metus.

Jeigu palūkanos skaičiuojamos *m* kartų per metus, nominalioji palūkanų norma $i^{(m)}$,

tai $A(1)=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$, o

$$\begin{aligned} i_{eff} &= A(1)-1 \\ &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 \\ &= 1+m\cdot\frac{i^{(m)}}{m}+\frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2+\ldots+\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 \\ &= i^{(m)}+\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^k \end{aligned}$$

Sakykime, nominalioji palūkanų norma yra pastovi, o kinta perskaičiavimų per metus skaičius *m*. Įdomu palyginti kaupimo funkcijos $A(1)$ elgesį. Šiuolaikinės skaičiavimo priemonės tai leidžia nesunkiai padaryti.

m	$A(1)$, $i=0.01$	$A(1)$, $i=0.02$	$A(1)$, $i=0.1$	$A(1)$, $i=0.5$	$A(1)$, $i=1$
1	1.01	1.02	1.1	1.5	2
2	1.010025	1.0201	1.1025	1.5625	2.25
3	1.01003337	1.02013363	1.10337037	1.587962963	2.37037
4	1.010037563	1.020150501	1.103812891	1.601806641	2.441406
5	1.01004008	1.020160641	1.104080803	1.61051	2.48832
6	1.010041759	1.020167409	1.104260424	1.616488568	2.521626
7	1.010042959	1.020172247	1.104389225	1.620849023	2.5465
8	1.01004386	1.020175878	1.104486101	1.624170095	2.565785
9	1.01004456	1.020178703	1.104561613	1.626783889	2.581175
10	1.01004512	1.020180963	1.104622125	1.628894627	2.593742
20	1.010047643	1.020191145	1.104895577	1.63861644	2.653298
30	1.010048484	1.020194542	1.104987147	1.641940967	2.674319
40	1.010048905	1.020196241	1.10503301	1.643619463	2.685064
50	1.010049157	1.02019726	1.105060554	1.644631822	2.691588
60	1.010049325	1.02019794	1.105078927	1.645308935	2.69597
70	1.010049446	1.020198426	1.105092055	1.645793673	2.699116
80	1.010049536	1.02019879	1.105101905	1.646157822	2.701485
90	1.010049606	1.020199073	1.105109567	1.646441404	2.703332
100	1.010049662	1.0201993	1.105115698	1.646668492	2.704814
200	1.010049915	1.02020032	1.105143298	1.647692855	2.711517
300	1.010049999	1.02020066	1.105152503	1.648035209	2.713765
400	1.010050041	1.02020083	1.105157106	1.648206555	2.714892
500	1.010050066	1.020200932	1.105159868	1.648309416	2.715569
600	1.010050083	1.020201	1.105161709	1.648378014	2.71602
700	1.010050095	1.020201049	1.105163025	1.648427023	2.716343
800	1.010050104	1.020201085	1.105164011	1.648463785	2.716585
900	1.010050111	1.020201113	1.105164779	1.648492382	2.716773
1000	1.010050117	1.020201136	1.105165393	1.648515262	2.716924

Matome, kad didinant perskaičiavimų skaičių, kaupimo funkcijos reikšmė, tuo pačiu ir veiksmingoji palūkanų norma, didėja. Pabandykime tai įrodyti. Laikykime nominalią palūkanų normą nepriklausomą nuo perskaičiavimų skaičiaus, t.y. $i^{(n)} = i$.

Pažymėkime $x_n = A_n(1) = \left(1+\frac{i}{n}\right)^n$. Tada

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{i}{n}\right)^n = 1 + n\frac{i}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{i^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{i^3}{n^3} \ldots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\frac{\delta^n i}{n^n} \\
&= 1 + i + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)i^2 + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)i^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)i^n \\
&< 1 + i + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)i^2 + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)i^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)i^n \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)i^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}
\end{aligned}
$$

Periodiniai mokėjimai. Finansinė renta.

$s_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) + 1$.

Tai vertė n vienetinių periodinių įmokų tuo metu, kai mokama paskutinė įmoka.
Pritaikę geometrinės progresijos sumos formulę, gauname

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Apibrėšime dar keletą sudėtinių palūkanų funkcijų:
Vertė periodinių vienetinių įmokų po vieno periodo, kai įmokėta paskutinė įmoka

$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i).$

Vertė periodinių vienetinių įmokų vienu laiko periodu prieš pirmąjį įnašą

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{1+i}.$$

Vertė periodinių vienetinių įmokų pirmojo įnašo metu

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{1+i} + 1.$$

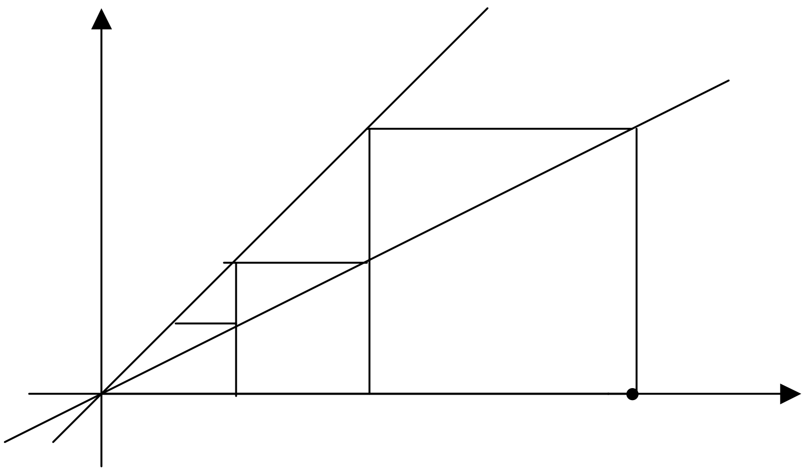
1.Užduotis. Apskaičiuokite apibrėžtąsias funkcijas.

Kol kas naudojome tik baigtinę matematiką, t.y. geometrinės progresijos n-tojo nario ir baigtinės geometrinės progresijos sumos formules. Pabandysime susieti geometrinę progresiją su geometrija (bent jau pavadinimas to reikalautų).

3. **Sekos ribos sąvoka**. Nulinė riba. Geometrinės progresijos "voratinklis".

Pabandysime geometrinę progresiją pavaizduoti geometriškai. Tai leis mums geometriškai pajusti geometrinės progresijos kitimo pobūdį. Tam matematikai sugalvojo instrumentą, vadinamą "voratinkliu". Klausimas toks – kaip geometriškai galima konstruoti geometrinę progresiją?

Tam reikia koordinatinėje plokštumoje nubrėžti dviejų tirsių $y = qx, 0 < q < 1,$ ir $y = x$ grafikus. Atidėję x ašyje b_0, ieškome $b_1 = q \cdot b_0$. Šią reikšmę randame išvesdami tiesę, lygiagrečią y-kų ašiai iki susikirtimo su funkcijos $y = qx$ grafiku. Belieka tą reikšmę nukelti į x-sų ašį. Tai galima padaryti naudojant funkcijos $y = x$ grafiką. Ir t.t. Mes geometriškai matome, kad seka $b_n = b_0 q^n, 0 < q < 1,$ mažėdama artėja į nulį (jei $b_0 > 0$).



Panašiai galima nubrėžti geometrinės progresijos, kai $-1 < q < 0$ voratinklį. Taip pat iš brėžinio galime matyti, kad seka artėja į 0, tik šį sykį nėra monotoniškumo.
Dar reikėtų paimti $q = 1/4$, $b_0 = 1$ ir bandyti aritmetiškai skaičiuoti progresijos narius.
Fiksuokime skaičiuoklyje 4 skaitmenis po kablelio ir skaičiuokime:
1; 0.2500; 0.0625; 0.0156; 0.0039; 0.0010; 0.0002; 0.0001; 0.0000.
Gavome 0. Ką tai reiškia? Tikriausiai, kad $b_8 < 0.00005$. Jei fiksuosime 6 skaitmenis, tai gausime tokią seką:
1; 0.250000; 0.062500; 0.015625; 0.003906; 0.000977; 0.000244; 0.000061; 0.000015; 0.000004; 0.000001; 0.000000. Ką reiškia, kad dvyliktas sekos narys lygus nuliui? $b_{12} < 0.0000005$.
Fiksuokime 8 skaitmenis.
1; 0.25; 0.0625; 0.015625; 0.00390625; 0.00097656; 0.00024414; 0.00006104;…. Ir t.t., kol displėjuje atsiras skaitmuo 0. Ką tai reikš?
Vėl matome, kad sekos nariai mažėja. Dabar manau, kiekvienas gali pasakyti, ką reiškia, kas seka $b_n = \frac{1}{4^n}, n = 0,1,...$ artėja į nulį arba sekos $b_n = \frac{1}{4^n}, n = 0,1,...$ riba yra nulis.

Apibrėžimo bandymas. Geometrinė progresija $b_n = \frac{1}{4^n}, n = 0,1,...$ artėja į 0, jei kiekvienam $\varepsilon, \varepsilon > 0,$ atsiras toks *N*, kad $0 < \frac{1}{4^n} < \varepsilon,$ kai $n > N.$

Nagrinėdami geometrinę progresiją, kai $-1 < q < 0$, pastebėtume, kad sekos nariai keičia ženklą, t.y. jie būna ir teigiami ir neigiami. Bet seka vistiek artėja į 0. Galime bandyti pasakyti apibrėžimą.

Apibrėžimas. Sekos $\{q^n, n \in \mathbb{N}\}$, riba yra 0, jei kiekvienam $\varepsilon, \varepsilon > 0,$ atsiras toks *N*, kad $|q^n| < \varepsilon$, kai $n > N.$

Mes iš “voratinklio” geometriškai matėme, kad geometrinės progresijos riba yra nulis. Konkrečiu atveju, kai $q = 1/4$, aritmetiškai jautėme, kad riba yra nulis. Parašėme ribos apibrėžimą. O kaip yra iš tikrųjų? Reikia patikrinti pagal apibrėžimą, arba, kitais žodžiais sakant, tai įrodyti.

<u>Teiginys.</u> Geometrinės progresijos $b_n = q^n, |q| < 1,$ riba yra 0.
<u>Įrodymas</u>. Pradžiai laikykime, kad $q > 0$. Pagal apibrėžimą patikrinti, kad sekos riba yra nulis, tai reškia reikia išspręsti nelygybę:
$q^n < \varepsilon$.
Jei nežinome logaritminės funkcijos, tai tiesiogiai tokių nelygybių spręsti nemokame. Tipiška situacija. Tada darome taip: duotą seką pakeičiame didesne, t.y. ieškome tokios sekos c_n, kuri tenkintų tokias sąlygas:

- $q^n < c_n$,
- mokėtume spręsti nelygybę $c_n < \varepsilon$.

Vadovėlinė procedūra: jei $0 < q < 1,$ tai $\frac{1}{q} > 1$. Tada egzistuoja toks $a > 0$, kad $\frac{1}{q} = 1 + a$. Tada pagal Bernuli nelygybę

$$\frac{1}{q^n} = (1+a)^n > 1 + na, n > 1.$$

$$q^n = \frac{1}{(1+a)^n} < \frac{1}{1+na} < \varepsilon.$$

Pastarąją nelygybę mokame spręsti:

$$\frac{1}{1+na} < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < 1 + na,$$

$$\frac{1}{\varepsilon} - 1 < na,$$

$$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon a}.$$

Galime apibrėžti $N = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon a}$. Teiginys įrodytas (bent, kai $q > 0$).

Palyginkime gautą rezultatą su konkrečiais skaičiavimais. Jei $q = \frac{1}{4}$, tai $\frac{1}{q} = 4 = 1 + 3.$

Taigi $a = 3.$ Pirmuose skaičiavimuose turėjome $\varepsilon = 0.00005$ ir $b_8 < 0.00005.$

Pabandykime apskaičiuoti $N = \frac{1 - 0.00005}{3 \cdot 0.00005} = \frac{0.99995}{0.00015} = 6666.33$. Mūsų gautas rezultatas teigia, kad $b_{6667} < 0.00005$. Iš tikrųjų jau b_8 tenkino norimą nelygybę. Toks didelis neatitikimas atsirado dėl to, kad Bernuli nelygybė yra labai "grubi".
<u>Bendras sekos ribos apibrėžimas</u>**.** Įdomu, kaip elgiasi geometrinės progresijos suma, kai n didėja. Naudosimės formule $s_{n+1} = b_0 + qs_n$, kurią išsivedėme. Galime nubrėžti sekos "voratinklį". Nubrėžkime tuo atveju, kai $-1 < q < 0$.
Iš brėžinio matome, kad seka s_n artėja į reikšmę, kuri nusakoma tiesių sankirta. Šią reikšmę galime rasti, išsprendę lygčių sistemą:

$$\begin{cases} y = x, \\ y = qx + b_0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = x, \\ x = qx + b_0 \end{cases},$$
$$x = \frac{b_0}{1-q}.$$

Galime spėti, kad $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{b_0}{1-q}$. Pirmiausia reikia sukurti gerą apibrėžimą.

Mums padės geometrinės progresijos sumos formulė, kurią truputį pertvarkysime:

$$s_n = \frac{b_0 - b_0 q^{n+1}}{1-q} = \frac{b_0}{1-q} - \frac{b_0}{1-q} q^n.$$

$$s_n - \frac{b_0}{1-q} = -\frac{b_0}{1-q} q^n.$$

Kairėje lygybės pusėje yra skirtumas tarp sekos n-tojo nario ir skaičiaus, kurį mes įtariame, esant sekos riba; dešinėje pusėje yra konstanta $\left(-\frac{b_0}{1-q}\right)$ ir seka $\{q^n\}$, kuri, kaip jau žinome, artėja į nulį. Kai n pakankamai didelis, tai dešinioji lygybės pusė bus pakankamai maža, t.y. dešinioji lygybės pusė artės į nulį. Tada ir skirtumas, esantis kairioje pusėje bus pakankamai mažas. Galima formuluoti apibrėžimą

Sekos ribos apibrėžimas. Skaičių a vadinsime sekos $\{x_n\}$ riba, jei skirtumo $x_n - a$ riba yra nulis, t.y. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

Prisiminę nulinės ribos apibrėžimą, galime suformuluoti taip

Seka $\{x_n\}$ konverguoja į skaičių a, jei bet kokiam $\varepsilon, \varepsilon > 0$, galima rasti tokį N, kad $n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

Galime įrodyti, kad $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_0\left(1 + q + ... + q^n\right) = \frac{b_0}{1-q}, |q| < 1.$

Mums reikia išspręsti nelygybę:

$$\left| -\frac{b_0}{1-q} q^n \right| < \varepsilon.$$

Ji ekvivalenti kitai nelygybei

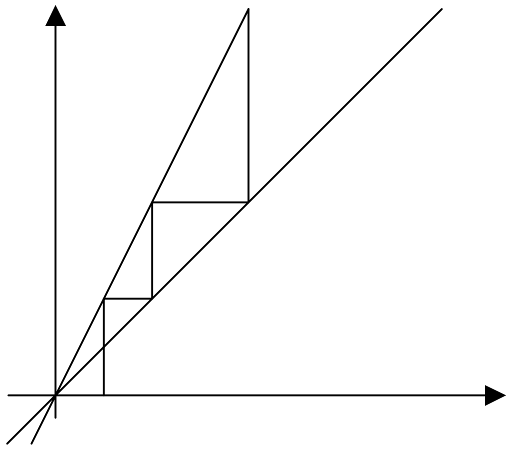
$$|q^n| < \frac{\varepsilon |1-q|}{|b_0|},$$

kurią mes mokame išspręsti.

Atvejis $q = 1$. Tai trivialus atvejis. $b_{n+1} = 1 \cdot b_n = b_n$. Visi sekos nariai yra lygūs. Tokios sekos vadinamos pastoviosiomis. Tokios sekos net nelaikomos geometrinėmis progresijomis. Pastovios sekos riba yra tas skaičius, iš kurio sudaryta pastovioji seka.

Begalinės ribos. Panagrinėkime geometrinę progresiją, kai $q > 1$.

“Voratinklis”. Nubrėžiame dvi tieses $y = x$ ir $y = qx, q > 1$.



Geometriškai matome, kad seka didėja ir didėja gana greitai, nes tuojau "išlipa"iš brėžinio. Galima paimti konkrečią q reikšmę, pvz.: $q = 4.$ galime skaičiuoti progresijos narius:
1; 4; 16; 64; 256; 1024; 4096; 16384; 65536; 262144; 1048576;…
Matome, kad jau $4^{10} > 1000000$. Galime sakyti, kad seka auga į begalybę. Ką tai turėtų reikšti?

Apibrėžimas. Sakysime, kad seka $\{q^n\}$ auga į $+\infty$, jei kiekvienam E galime rasti tokį N, kad $q^n > E$, kai $n > N.$ Tai žymėsime $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty.$

Geometriškai ir aritmetiškai matome, kad sekos $\{4^n\}$ ir $\{q^n\}, q > 1,$ auga į begalybę. Kaip tai griežtai įrodyti? Mums reikia spręsti nelygybę $q^n > E$. Sakykime, kad tokios nelygybės spręsti nemokame. Tai labai tipiška situacija. Seką $\{q^n\}$ pakeisime mažesne seka. Vėl pasinaudosime Bernuli nelygybe. Jei $q > 1$, tai galime parašyti $q = 1 + (q-1).$ Pažymėkime $a = q - 1$. Aišku, kad $a > 0$. Tada
$q^n = (1+a)^n > 1 + na > na$.
$q^n > na > E$. Šią nelygybę labai paprastai išsprendžime:
$n > \frac{E}{a} = \frac{E}{q-1}$. Skaičių N galime apibrėžti $N = \frac{E}{q-1}$. Jei $q = 4, E = 1000000$, tai
$N = \frac{1000000}{4-1} = \frac{1000000}{3} = 333333{,}3$. Matome, kaip mūsų teorinis N daug skiriasi nuo pavyzdžio, kuriame jau $4^{10} > 1000000$. Tai yra dėl to, kad, kaip jau minėjome, Bernuli nelygybė yra gana "grubi". Tačiau mūsų tikslas yra ne gauti patį geriausią įvertį, bet gauti principinį rezultatą – teoriškai pagrįsti, kad sekos riba yra $+\infty$.
Jei paimtume b_0 neigiamą, o $q > 1$, tai, nubrėžę "voratinklį", matytume, kad seka artėja į $-\infty$.

2 užduotis. Parašykitei apibrėžimą ir įrodykite, kad
$\lim_{n\to\infty} b_0 q^n = -\infty (b_0 < 0, q > 1).$

Nekonverguojanti seka. Atvejis $q = -1$. Paprastumo dėlei laikykime $b_0 = 1$. Tada geometrinė progersija atrodys taip: $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ arba $b_n = (-1)^n$. Panašu, kad ši seka nekonverguos. Ką reiškia, kad seka nekonverguoja? Tai nėra toks paprastas klausimas, kaip gali atrodyti iš pirmo žvilgsnio. Iš duotos sekos galime sudaryti dvi naujas sekas:

- $x_n = b_{2n} = (-1)^{2n} = 1,$
- $y_n = b_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = (-1)^{2n}(-1) = -1.$

Šios dvi naujos sekos vadinamos pirmosios sekos $\{b_n\}$ posekiais, nes jos gautos, paimant kai kuriuos narius iš sekos $\{b_n\}$. Matome, kad naujosios sekos yra labai paprastos - jos pastovios. Taigi jos konverguoja

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1.$$

Bet nei 1, nei -1 nebus sekos $\{b_n\}$ riba. Jei paimsime $\varepsilon = \frac{1}{2}$, tai kokį N bepaimtume, vienu metu negalės būti teisingos abi nelygybės visiems n didesniems už N

$$-1-\frac{1}{2} < b_n < -1+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2} < b_n < 1+\frac{1}{2},$$

nes kai n lyginis – galios antroji nelygybė, kai n nelyginis – pirmoji. Joks kitas skaičius a, $a \neq -1$ arba $a \neq 1$ taip pat negalės būti sekos $\{b_n\}$ riba. Paėmę $\varepsilon, \varepsilon < \min\{|a+1|, |a-1|\}$, gausime, kad jokiem n negalios nelygybė $|b_n - a| < \varepsilon$. Taigi įrodėme, kad seka $b_n = (-1)^n$ nekonverguoja arba diverguoja. Pats žodis “diverguoti” reiškia išsiskikrti. Tai nėra tik žodžio “nekonverguoti” sinonimas.
Labai paprastu pavyzdžiu pademonstravome gana bendrą metodą, leidžiantį įrodyti, kad seka diverguoja. Tereikia suformuluoti bendrą posekio apibrėžimą ir truputį pakoreguoti samprotavimus.

Grįšime prie realiųjų skaičių savybių. Realieji skaičiai skiriasi nuo racionaliųjų viena svarbia savybe – pilnumu. Ši savybė prie tam tikrų sąlygų garantuoja ribų egzistavimą. Pilnumo savybę galima formuluoti keletu ekvivalenčių būdų. Dabar apibrėšime vieną iš jų.

4. **Monotoniškų sekų ribų egzistavimas**. Pereitame skyrelyje apibrėžėme įvairias ribas ir visais atvejais suradome jas, patikrindami pagal apibrėžimą. Tai nevisada įmanoma padaryti. Su tuo mes jau susitiksime sekančiuose skyriuose. Matematikoje įprasta įrodyti tam tikrų objektų egzistavimą. Tai jau kartais duoda tam tikrus rezultatus. Iš pradžių tai atrodo truputį mistiškai.

Realiųjų skaičių savybė. Jei realiųjų skaičių seka $\{x_n\}$ monotoniška ir aprėžta tai ji turi ribą.
Ši savybė vėliau bus įrodyta. Bet dabar tai priimsime kaip aksiomą. Pasiaiškinkime, ką reiškia paminėtos sąvokos.
Seka monotoniška –tai seka didėjanti $(x_n \le x_{n+1}, n = 0,1,...)$ arba
mažėjanti $(x_n \ge x_{n+1}, n = 0,1,...)$.
Seka aprėžta- tai seka aprėžta iš viršaus ($\exists M, x_n \le M, n = 0,1,...$) ir
aprėžta iš apačios $(\exists m, x_n \ge m, n = 0,1,...)$.
Parodysime, kaip ši savybė veikia. Grįžkime prie sekos $\{q^n\}, 0 < q < 1$. Ši seka yra mažėjanti, t.y. $0 < q^{n+1} = q^n \cdot q < q^n$. Be to, ši seka aprėžta iš apačios, t.y. visi sekos nariai yra didesni už 0. Akivaizdu, kad mažėjanti seka visada yra aprėžta iš viršaus

savo pirmuoju nariu. Pagal monotoniškų aprėžtų sekų savybę ši seka turi ribą, t.y. egzistuoja $\lim_{n\to\infty} q^n = c$. Pereikime prie ribos lygybėje

$$q^{n+1} = q^n \cdot q.$$

Naudosimės sekų ribų elementariomis savybėmis, kurias įrodysime vėliau. Gausime

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = q \cdot \lim_{n\to\infty} q^n,$$
$$c = qc,$$
$$c(1-q) = 0.$$

Jei dviejų skaičių sandauga lygi nuliui, tai bent vienas iš jų turi būti lygus nuliui. Bet $q \neq 1, q-1 \neq 0,$ tai lieka $c = 0.$ Kitu būdu įrodėme, kad sekos $\{q^n\}, 0 < q < 1$, riba yra nulis.

Panagrinėkime atvejį, kai $q > 1$. Seka $\{q^n\}$ yra didėjanti, t.y. $q^{n+1} = q^n \cdot q > q^n$.

Mums bus reikalingas toks paprastas

Teiginys. Du tvirtinimai:

- didėjančios sekos $\{x_n\}$ riba yra $+\infty$,
- didėjanti seka $\{x_n\}$ yra neaprėžta iš viršaus

yra ekvivalentiški.

<u>Įrodymas</u>. Jei seka yra neaprėžta iš viršaus, tai bet kokiam E galima rasti tokį sekos narį x_{n_0}, kad $x_{n_0} > E$. Kadangi seka yra didėjanti, tai visi kiti sekos nariai, kuriems $n > n_0$, tenkins nelygybę $x_n > x_{n_0} > E$. Pagal begalinės ribos apibrėžimą tai reiškia, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Jei sekos riba yra $+\infty$, tai akivaizdu, kad seka yra neaprėžta.

Grįžkime prie didėjančios sekos $x_n = q^n, q > 1$. Sakykime, kad ši seka aprėžta. Tada ji turi baigtinę ribą, t.y. egzistuoja $\lim_{n\to\infty} q^n = c$. Pereikime prie ribos lygybėje

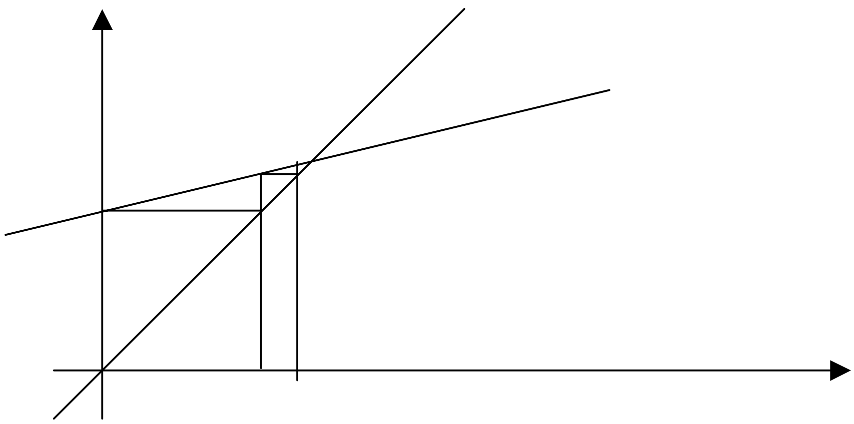
$$q^{n+1} = q^n \cdot q.$$

Gausime

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = q \cdot \lim_{n\to\infty} q^n,$$
$$c = qc,$$
$$c(1-q) = 0.$$

Jei dviejų skaičių sandauga lygi nuliui, tai bent vienas iš jų turi būti lygus nuliui. Bet $q \neq 1, q-1 \neq 0$ ir $c \neq 0$, nes iš to, kad $q > 1 \Rightarrow q^n > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = c \geq 1$. Vadinasi, abu daugikliai nelygūs nuliui. Prielaida, kad seka $x_n = q^n, q > 1$, aprėžta, atvedė prie klaidingo sąryšio. Vadinasi, tokia prielaida neteisinga, o teisingas priešingas tvirtinimas – seka neaprėžta. Taigi sekos riba yra $+\infty$.

Pritaikysime monotoniškos aprėžtos sekos savybę sumų sekai. Naudosime rekursinę formulę $s_{n+1} = qs_n + b_0$. Ši formulė yra labai panaši į geometrinės progresijos apibrėžimą. Nubrėžkime šiai sekai "voratinklį", kai $0 < q < 1$. Tam nubrėžiame tieses $y = x, y = qx + b_0$.



Iš brėžinio matome, kas seka s_n didėja iki *x* reikšmės, kuri nusakoma tiesių sankirta. Šią reikšmę galime rasti, išsprendę lygčių sistemą:

$$\begin{cases} y = x, \\ y = qx + b_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x, \\ x = qx + b_0 \end{cases},$$

$$x = \frac{b_0}{1-q}.$$

Mes jau vienu būdu esame įrodę, kad $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{b_0}{1-q}.$ dabar tai įrodysime kitu būdu.

Įrodysime, kad seka $\{s_n\}$ didėjanti ir aprėžta.

$s_{n+1} = s_n + b_{n+1} = s_n + b_0 q^{n+1} > s_n$, jei $b_0 > 0$. Iš brėžinio galime spėti, kad seka yra aprėžta skaičiumi $\frac{b_0}{1-q}$. Tai įrodysime matematinės indukcijos metodu.

$$s_0 = b_0 < \frac{b_0}{1-q}.$$

Sakykime, kad tvirtinimas teisingas, kai $n = k$, t.y.

$$s_k < \frac{b_0}{1-q}.$$

Tada

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= qs_k + b_0 \\ &< q\frac{b_0}{1-q} + b_0 \\ &= \frac{qb_0 + b_0 - qb_0}{1-q} \\ &= \frac{b_0}{1-q}. \end{aligned}$$

Jei seka $\{s_n\}$ didėjanti ir aprėžta, tai egzistuoja $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Pereikime prie ribos pagrindinėje lygybėje $s_{n+1} = qs_n + b_0$. Gausime

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = q\lim_{n\to\infty} s_n + b_0,$$
$$s = qs + b_0.$$
$$s = \frac{b_0}{1-q}.$$

3 uždduotis. Nagrinėkime geometrinės progresijos sumų seką $\{s_n\}$, kai $-1 < q < 0$. Jau "voratinklis" rodo, kad ši seka nėra monotoninė. Bet gal posekiai $\{s_{2n}\}, \{s_{2n+1}\}$ yra monotoniški ir aprėžti? Gal jie konverguoja į tą pačią ribą? "Voratinklis" ir rekurentinė formulė turi būti pagrindiniai instrumentai.

4 užduotis. Kaip elgiasi geometrinės progresijos sumų $\{s_n\}$ seka, kai $q = -1$?

5. **Aibės tikslusis viršutinis rėžis**. Ši tema gal ir nėra tiesiogiai susijusi su geometrine progresija, bet ji susijusi su didėjančios ir aprėžtos sekos ribos egzistavimu.

Sakykime, turime goemetrinės progresijos sumų seką, $0 < q < 1$, $s_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$. Koks didžiausias šios sekos narys? Seka didžiausio nario neturi. Joks sekos narys negali būti didžiausiu, nes tuojau po jo esantis yra didesnis už prieš jį buvusį. Mes suprantame, kad baigtinė realiųjų skaičių aibė turi mažiausiąjį ir didžiausiąjį elemnetus. Iš pavyzdžio matome, kad begalinė aibė

$$\begin{aligned} A &= \{s_0, s_1, s_2, ..., s_n, ...\} \\ &= \{1, 1+q, 1+q+q^2, ..., \sum_{k=0}^{n} q^k, ...\} \\ &= \{\sum_{k=0}^{n} q^k, n = 0,1,...\} \end{aligned}$$

neturi didžiausiojo elemento. Aibė *A* yra aprėžta iš viršaus. Kiekvienas $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} < \frac{1}{1-q}$. Skaičius $\frac{1}{1-q}$ vadinamas aibės viršutiniu rėžiu, nes jis didesnis už bet kokį aibės *A* elementą. Bet koks skaičius, didesnis už $\frac{1}{1-q}$, taip pat bus aibės *A* viršutiniu rėžiu. Bet kuo ypatingas šis skaičius $\frac{1}{1-q}$? Tai mažiausiasis *A* viršutinis rėžis. Ką tai reiškia? Bet koks skaičius, mažesnis už $\frac{1}{1-q}$ jau nebus *A* viršutiniu rėžiu. Paimkime $\varepsilon, \varepsilon > 0$. Tada $\frac{1}{1-q} - \varepsilon < \frac{1}{1-q}$. Reikia surasti tokį s_n, kad $\frac{1}{1-q} - \varepsilon < s_n < \frac{1}{1-q}$. Įstatykime s_n išraišką

$$\frac{1}{1-q} - \varepsilon < \frac{1-q^n}{1-q} < \frac{1}{1-q},$$
$$\frac{1}{1-q} - \varepsilon < \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} < \frac{1}{1-q},$$
$$-\varepsilon < -\frac{q^n}{1-q} < 0,$$
$$0 < \frac{q^n}{1-q} < \varepsilon.$$

Tai jau matyta nelygybė. Ją mokame spręsti, t.y. rasti tokį N, kad

$n > N \Rightarrow 0 < \dfrac{q^n}{1-q} < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-q} - \varepsilon < s_n$. Vadinasi, skaičius mažesnis už $\dfrac{1}{1-q}$ negali būti aibės A viršutiniu rėžiu. Mažiausiasis aibės viršutinis rėžis vadinamas tiksliuoju viršutiniu rėžiu. Dažnai Matematinės analizės vadovėliuose galima rasti tokią realiųjų skaičių savybę

Tiksliojo viršutinio rėžio aksioma. Bet koks netuščias ir aprėžtas iš viršaus realiųjų skaičių poaibis turi tikslųjį viršutinį rėžį. Aibės A tikslųjį viršutinį rėžį žymime $\sup A$, tariam *supremum*.

Nagrinėdami pavyzdį apie geometrinės progresijos sumas, matėme, kad

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \sup\{\sum\limits_{k=0}^{n} q^k, n = 0,1,2,...\}$. Šis ryšys nėra atsitiktinis. Mes įrodysime, kad egzistuoja bendresnis ryšys tarp šių dviejų realiųjų skaičių savybių.

Teiginys. Jei teisinga tiksliojo viršutinio rėžio aksioma, tai teisinga ir monotoniškų aprėžtų sekų savybė.

Duota:

- Monotoniška aprėžta seka $\{x_n\}$,
- $A, A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ ir A aprėžta $\Rightarrow \exists \sup A$.

Reikia įrodyti. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Įrodymas. Sakykime, seka $\{x_n\}$ didėjanti ir M yra sekos viršutinis rėžis, t.y. $x_n \le M, \forall n$. Apibrėžiame aibę $A = \{x_0, x_1, ..., x_n, ...\}$. Ji yra netuščia ir aprėžta iš viršaus tuo pačiu M. Tada egzistuoja $a = \sup A$. Natūralu manyti, kad šis skaičius a yra sekos riba. Prisiminkime: a yra mažiausias aibės A viršutinis rėžis, t.y.

- $x_n \le a, \forall n, \Leftarrow$ a yra aibės A viršutinis rėžis.
- $\forall \varepsilon, \varepsilon > 0, a - \varepsilon$ nėra aibės A viršutinis rėžis $\Leftarrow$ a yra aibės A mažiausiasis viršutinis rėžis.

  $\exists x_N, x_N \in A, a - \varepsilon < x_N$. Turime $n > N \Rightarrow x_N \le x_n$, nes seka didėjanti. Gavome, kad $\forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \exists N, n > N \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \le a < a - \varepsilon$.

Jeigu aibė $A, A \subseteq \mathbb{R}$, nėra aprėžta iš viršaus, tai susitariame, kad $\sup A = +\infty$.

Analogiškai galima apibrėžti aibės tikslųjį apatinį rėžį $\inf A$, (lot. *infimum*).

Akivaizdu, kad $\inf A = -\sup(-A), -A = \{-a; a \in A\}$. Jei aibė A nėra aprėžta i apačios, tai susitariama $\inf A = -\infty$.

6. **Įvairūs. Istorija._Archimedo parabolės kvadratūros skaičiavimas.** Archimedas skaičiuodamas parabolės kvadratūrą, turbūt, pirmasis suskaičiavo begalinės geometrinės progresijos su vardikliu ¼ sumą ir įrodė, kad ji lygi 4/3. Tam jis išvedė tokią lemą

Lema. Geometrinės progresijos suma (su vardikliu ¼), sudėta su trečdaliu paskutinio nario, lygi 4/3 pirmojo nario.

Formulių kalba tai atrodytų taip

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}.$$

Archimedo samprotavimai yra visiškai ekvivalentūs matematinės indukcijos metodui, o galutinis rezultatas naudoja samprotavimus, ekvivalentiškus ribos sąvokai, kuri pilnai buvo išvystyta tik XIX amžiuje.

Archimedo samprotavimai tikrai verti dėmesio, o jų griežtumas – nepriekaištingas.

Binominiai koeficientai. Perrašykime begalinės geometrinės progresijos sumą truputį kita forma

$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\dfrac{1}{1-x}$, kai $|x|<1$. Jei kintamąjį x pakeisime $-x$, tai formulė pasikeis į $1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\dfrac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$. Prisiminkime binominių koeficientų apibrėžimą $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$. Mes anksčiau nagrinėjome atvejus, kai n buvo sveiki teigiami skaičiai, tačiau padarėme pastabą, kad binominius koeficientus galima apibrėžti ir kitoms viršutinio indekso reikšmėms. Imkime $n=-1$. Gausime

$$\begin{aligned}\binom{-1}{k}&=\frac{(-1)\cdot(-1-1)\cdot\ldots\cdot(-1-k+1)}{k!}\\&=\frac{(-1)(-2)\ldots(-k)}{k!}\\&=\frac{(-1)^k k!}{k!}=(-1)^k.\end{aligned}$$

Taigi įrodėme naują binominę formulę

$$(1+x)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}x^k, |x|<1.$$