Binominiai skaičiai, indukcija

Apibrėžimai. Mokykloje yra išvedama Niutono binomo formulė:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k,$$

čia C_n^k - derinių iš *n* elementų po *k* skaičius. Tai labai svarbi formulė matematikoje. Iš šios formulės kilęs ir pavadinimas - C_n^k vadinami binominiais skiačiais. Kodėl šioje formulėje yra derinių skaičius truputį mįslingas. Mes sustosime prie binominių skaičių truputį ilgėliau.

Deriniai (kombinatorinis apibrėžimas). Pradėsime žinomiausiu dalyku. Jei turime *n* skirtingų elementų ir sudarome rinkinį po *k* elementų, tai jį vadiname deriniu iš *n* po *k* (sutrumpintai). Visų derinių iš *n* po *k* skaičius žymimas C_n^k (c – iš žodžio *combination*). Žinome, kad pvz.,

$C_3^1 = 3, C_3^2 = 3, C_3^3 = 1,$
$C_4^1 = 4, C_4^2 = 6, C_4^3 = 4, C_4^4 = 1,$

ir t.t. Specialiai reikia apibrėžti C_n^0. Tai galima suprasti kaip galimų poaibių iš n po 0 elementų. Tokių poaibių yra tik vienas, vadinamas tuščiąja aibe. Todėl natūralu apbrėžti $C_n^0 = 1$ visiems natūraliesiems *n*.

Binomas (algebrinis apibrėžimas). Sakykime, turime pakeltą *n*-tuoju laipsniu dvinarį $(1+x)^n$. Jei atliktume veiksmus, tai gautume sumą, sudarytą iš įvairių *x* laipsnių x^k, čia $k = 0,1,...,n$. Kokie būtų koeficientai prie tų x^k iš anksto nežinoma. Koeficientą prie x^k binomo $(1+x)^n$ skleidinyje pažymėkime B_n^k. Tada gautume formulę:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} B_n^k x^k .$$

Pavyzdžiai:

$(1+x)^0 = 1 \;\Rightarrow\; B_0^0 = 1,$

$(1+x)^1 = 1+x \;\Rightarrow\; B_1^0 = 1, B_1^1 = 1,$

$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 \Rightarrow B_2^0 = 1, B_2^1 = 2, B_2^2 = 1,$

ir t.t. Beje, šiuos skaičius B_n^k geriausiai ir tiktų vadinti binominiais skaičiais. Niutono binomo formulė, nuo kurios mes pradėjome, reiškia, kad $C_n^k = B_n^k$.

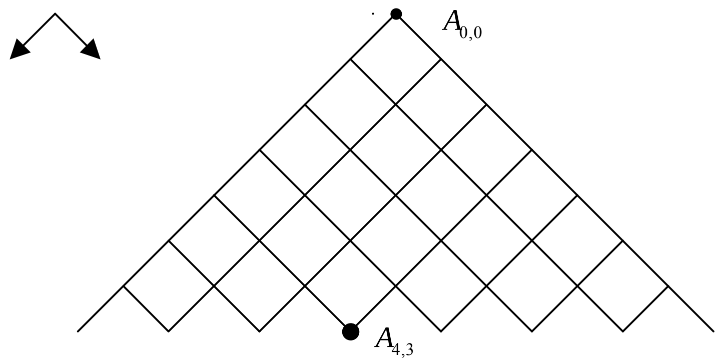
Paskalio skaičiai (indukcinis apibrėžimas). Blezas Paskalis (1623-1662) išdėliojo binominius skaičius į tokį trikampį:

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

Pažymėkime šiuos skaičius P_n^k (P – Paskalis), čia *n* = 0, 1, 2, …, o *k* = 0, 1, …, *n*. Juos apibrėžkime taip:

$P_n^0 = 1$, $P_n^n = 1$ visiems n, o $P_{n+1}^k = P_n^{k-1} + P_n^k$, kai $k = 1, ..., n$.

Kelių skaičius (geometrinis - kombinatorinis apibrėžimas). Nupaišykime miestą su taisyklingomis gatvėmis, kokie yra Amerikoje:



Tašką pradžioje pažymėkime $A_{0,0}$, o tašką apačioje $A_{4,3}$. Reikia nukeliauti iš pirmojo taško į antrąjį. Galima keliauti, kaip parodyta rodyklėmis. Kiek yra skirtingų kelių iš taško $A_{0,0}$ į tašką $A_{4,3}$? Visų galimų kelių skaičių pažymėkime K_4^3. Analogiškai, visų galimų kelių iš taško $A_{0,0}$ į tašką $A_{n,k}$ pažymėkime K_n^k.

Nesunku matyti, kad $K_n^0 = 1, K_n^n = 1$, nes iš taško $A_{0,0}$ į taškus $A_{n,0}$ ir $A_{n,n}$ galima nukeliauti tik vienu būdu.

Išreikštinis (aritmetinis apibrėžimas). Mokykloje buvo išvesta formulė:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot ... \cdot(n-k+1)}{k!}$$

Pastarajam reiškiniui matematikai turi specialų žymėjimą - $\binom{n}{k}$. Taigi apibrėšime:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot ... \cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Pirmoji formulė yra susijusi su kombinatorika, kur *n* ir *k* yra natūralieji skaičiai. Antroje formulėje *n* gali įgyti bet kokias realias reikšmes. Galima spėti, kad turėtų būti teisingas toks

Teiginys.

$$C_n^k = B_n^k = P_n^k = K_n^k = \binom{n}{k},$$

čia $n = 0, 1, 2, ...,$ o $k = 0, 1, ..., n.$

Pastabos.

1. Žymėjimai B_n^k, P_n^k, K_n^k yra laikini ir naudojami tik šiame tekste; $C_n^k, \binom{n}{k}$ - standartiniai ir visuose matematiniuose tekstuose reiškia tą patį.
2. Galime kelti klausimus:
   - Kiek mažiausiai lygybių reikia įrodyti, kad būtų teisingas teiginys?
   - Kiek iš viso galima įrodyti skirtingų lygybių?

Įrodymas.

1. $C_n^k = P_n^k$

Nagrinėkime elementus $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$. Sudarykime derinius po $k+1$ elementą. Juos visus galime suskirstyti į dvi grupes:

- Tuos, kurie turi elementą a_{n+1},
- Tuos , kurie neturi elemento a_{n+1}.

Pirmoje grupėje yra deriniai iš n elementų po k, o po to prie jų pridėtas elementas a_{n+1}. Antroje grupėje yra visi deriniai iš *n* elementųpo $k+1$. Vadinasi,
$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

C_n^n yra lygūs 1, nes galima sudaryti tik vieną derinį iš *n* elementų po *n*. Taip pat sutariame, kad $C_n^0 = 1$. Tai interpretuojame, kaip vinintelį galimą poaibį, neturintį elementų, tuščią aibę.

2. $K_n^k = P_n^k$

Nagrinėkime tašką $A_{n+1,k+1}$. Į jį galima patekti iš taškų $A_{n,k}$ ir $A_{n,k+1}$. Jei patekome į minėtus taškus, tai po to į tašką $A_{n+1,k+1}$ galima nukeliauti vieninteliu būdu. Vadinasi, $K_{n+1}^{k+1} = K_n^k + K_n^{k+1}$. Taip pat aišku, kad $K_n^0 = 1, K_n^n = 1$, nes keliai iš $A_{0,0}$ į taškus $A_{n,0}, A_{n,n}$ yra vieninteliai.

3. $\boldsymbol{B_n^k = P_n^k}$.

Pateiksime du šios lygybės įrodymus. Pirmasis – tai standartinis įrodymas, kurį galima rasti daugelyje vadovėlių; binominiai koeficientai tenkina tam tikrą sąryšį.

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= B_n^n x^n + B_n^{n-1} x^{n-1} + ... + B_n^1 x + B_n^0 x^0 \\ &= x^n + B_n^{n-1} x^{n-1} + ... + B_n^1 x + 1.\end{aligned}$$

Vadinasi, $B_n^n = 1, B_n^0 = 1$. Reiškinį $(1+x)^{n+1}$ apskaičiuosime dviem būdais:

- $(1+x)^{n+1} = \sum_{l=0}^{n+1} B_{n+1}^l x^l$,
- $$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\ &= (\sum_{l=0}^{n} B_n^l x^l) \cdot (1+x) \\ &= \sum_{l=0}^{n} B_n^l x^l + \sum_{l=0}^{n} B_n^l x^{l+1} \\ &= 1 + \sum_{l=1}^{n} (B_n^l + B_n^{l-1}) x^l + x^{n+1}\end{aligned}$$

Sulyginę koeficientus prie atitinkamų *x* laipsnių, gauname
$B_{n+1}^{k+1} = B_n^k + B_n^{k+1}$.

Antrasis įrodymas. Jis realizuoja požiūrį, kuris būdingas kombinatorikai, tikimybių teorijai. Sakykime, turime skaičius P_n^k, kurie buvo apibrėžti anksčiau. Mes sudarome funkciją

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} P_n^k x^k .$$

Apskaičiuojame pirmąsias funkcijas:

$$
\begin{aligned}
&f_0(x)=P_0^0=1,\\
&f_1(x)=P_1^1x+P_1^0=x+1,\\
&f_2(x)=P_2^2x^2+P_2^1x+P_2^0=x^2+2x+1=(x+1)^2.
\end{aligned}
$$

Skaičiuojame funkciją

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}(x)&=\sum_{k=0}^{n+1}P_{n+1}^k x^k\\
&=1\cdot x^{n+1}+(P_n^n+P_n^{n-1})x^n+\ldots+(P_n^k+P_n^{k-1})x^k+\ldots+(P_n^1+P_n^0)x+1\\
&=P_n^nx^n+\ldots+P_n^kx^k+\ldots+P_n^1x+1\\
&\quad+x^{n+1}+P_n^{n-1}x^n+\ldots+P_n^{k-1}x^k+\ldots+P_n^0\\
&=f_n(x)+x\cdot f_n(x)\\
&=(1+x)f_n(x).
\end{aligned}
$$

galime iškelti hipotezę, kad

$$f_n(x)=(1+x)^n.$$

Ją nesunku įrodyti matematinės indukcijos metodu. Tada

$$\sum_{k=0}^{n}P_n^kx^k=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}B_n^kx^k\ .$$

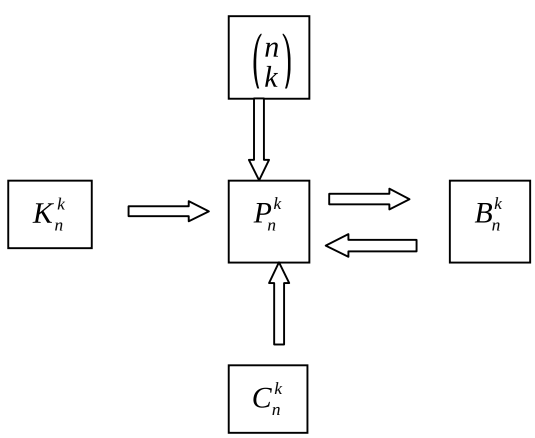
Vadinasi, $P_n^k=B_n^k$, $k=0,1,...,n$ (kodėl?).

Funkcija $f_n(x)$ vadinama skaičių $P_n^k, k=0,1,...,n$ generuojančia funkcija. Ši funkcija turi visą informaciją apie duotuosius skaičius.

4. $\binom{n}{k}=P_n^k$.

$$
\begin{aligned}
\binom{n+1}{k+1}&=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1-(k+1)+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1)}\\
&=\frac{(n-k+k+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1)}\\
&=\frac{(n-k)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1)}+\frac{(k+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1)}\\
&=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}.
\end{aligned}
$$

Galima nubraižyti tokią įrodymų schemą:



1. Užduotis. Tiesiogiai įrodykite kitas galimas lygybes.

Ateityje mes binominius koeficientus žymėsime $\binom{n}{k}$. Ankstesnio teiginio moralas yra tas, kad bet kuri mūsų išnagrinėta savybė vienareikšmiškai apibrėžia binominius koeficientus. Išreikštinė forma nereiškia, kad ji yra geriausia. Panagrinėsime kai kurias binominių koeficientų savybes.

Užduotys.

2. Įrodykite simetriškumo savybę

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, k = 0,1,\dots,n,$$

naudodamiesi visais apibrėžimais.

3. Įrodykite įkėlimo (iškėlimo) savybę

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}, k = 1,\dots,n,$$

naudodamiesi visais apibrėžimais.

4. Labai dažnai reikia sumuoti binominius koeficientus. Prisiminsime iš mokyklos žinomą savybę:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Paprasčiausias įrodymas yra pasinaudoti binomo savybe (generuojančia funkcija):

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} B_n^k x^k .$$

Pastarojoje lygybėje paėmę $x = 1$, gausime reikiamą lygybę. Įrodykite šią lygybę, naudodamiesi kitais binominių koeficientų apibrėžimais.

5. Įrodykite, kad

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Dažnai reikia sumuoti ir kitokias sumas, kuriose yra binominiai koeficientai. Štai gana tipiškas uždavinys. Raskite sumą:

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \dots + (k-1)\cdot k + \dots + (n-1)\cdot n.$$

Padalinsime kiekvieną dėmenį iš $1\cdot 2$ ir sumą perrašysime binominiais koeficientais:

$$s_n = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{k}{2} + \dots + \binom{n}{2}.$$

Pateiksime keletą šios sumos apskaičiavimo būdų. Be to, suformuoluosime truputį bendresnį uždavinį:

$$s_n = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \dots + \binom{k}{k}, k < n.$$

Naudosimės įvairiais binominių koeficientų apibrėžimais.

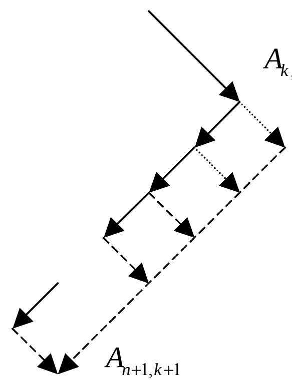
1. **Algebrinis būdas.** Trumpam prisiminkime ankstesnius žymėjimus B_n^k. Mums reikia rasti sumą $s_n = B_n^k + B_{n-1}^k + \dots + B_k^k$. Ši suma bus koeficientas prie x^k

sumoje $(1+x)^n+(1+x)^{n-1}+\ldots+(1+x)^k$, kurią mokame suskaičiuoti:

$$\begin{aligned}(1+x)^n+\ldots+(1+x)^k &= (1+x)^k[1+(1+x)+\ldots+(1+x)^{n-k}]\\ &= (1+x)^k\frac{(1+x)^{n-k+1}-1}{1+x-1}\\ &= \frac{(1+x)^k}{x}\left[(1+x)^{n-k+1}-1\right]\\ &= \frac{1}{x}\left[(1+x)^{n+1}-(1+x)^k\right].\end{aligned}$$

Nesunku apskaičiuoti koeficientą prie x^k pastarojoje išraiškoje. Tai bus koeficientas prie x^{k+1} dėstinyje $(1+x)^{n+1}$ ir lygus B_{n+1}^{k+1}. Vadinasi, įrodėme lygybę $B_n^k+B_{n-1}^k+\ldots+B_k^k=B_{n+1}^{k+1}$.

2. Geometrinis būdas.



Iš taško $A_{0,0}$ pakliūti į tašką $A_{n+1,k+1}$ galima tik per taškus $A_{k,k}, A_{k+1,k},\ldots,A_{n.k}$, o po to keliaujant punktyrinėmis linijomis. Vadinasi, kelių skaičius

$K_{n+1}^{k+1}=K_n^k+K_{n-1}^k+\ldots+K_k^k$.

3. Indukcinis būdas. Pradėkime pagrindine Paskalio skaičių savybe: $P_{n+1}^{k+1}=P_n^k+P_n^{k+1}$**.** Pastarąjį skaičių vėl galime skaidyti, t.y. $P_n^{k+1}=P_{n-1}^k+P_{n-1}^{k+1}$.

Gauname $P_{n+1}^{k+1}=P_n^k+P_{n-1}^k+P_{n-1}^{k+1}$. Taip galime tęsti procesą iki

$P_{n+1}^{k+1}=P_n^k+P_{n-1}^k+\ldots+P_{k+1}^k+P_{k+1}^{k+1}$. Paskutinįjį skaičių P_{k+1}^{k+1} galime pakeisti P_k^k, nes jie abu lygūs 1. Gauname lygybę:

$P_{n+1}^{k+1}=P_n^k+P_{n-1}^k+\ldots+P_{k+1}^k+P_k^k$. Tai ir reikėjo įrodyti.

4. Aritmetinis būdas. Kai $k=1$, tai mūsų formulė tampa gerai žinoma natūraliųjų skaičių sumos formule:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\binom{n+1}{2}.$$

Jos radimas yra gerai žinomas (galbūt, net daugeliu būdų). Mes pabandysime išvystyti vieną idėją, kuri analogiška integravimui tolydžioje analizėje. Pradžiai paaiškinsime bendrą idėją. Sakykime, reikia rasti tokią sumą:

$s(n)=f(1)+f(2)+\ldots+f(k)+\ldots+f(n)$.

Jei pasisektų rasti tokią funkciją g, kuri tenkintų tokią sąlygą: $f(k)=g(k+1)-g(k)$, visiems $k=1,2,\ldots,n.$ Tada

$$\begin{aligned}s(n)&=\left(g(2)-g(1)\right)+\left(g(3)-g(2)\right)+\ldots+(g(k+1)-g(k))+\ldots+(g(n+1)-g(n))\\&=g(n+1)-g(1)\end{aligned}$$

Pabandykime:

$$\begin{aligned}k&=1\cdot k=(k+1-k)\cdot k\\&=(k+1)\cdot k-k\cdot k\\&=(k+1)\cdot k-k\cdot(k-1+1)\\&=(k+1)\cdot k-k\cdot(k-1)-k.\end{aligned}$$

Gavome labai įdomų sąryšį. Dešinioje lygybės pusėje yra beveik dviejų vienos funkcijos reikšmių skirtumas. Reikia tik k perkelti į kairiąją lygybės pusę:

$$2k=(k+1)\cdot k-k\cdot(k-1)$$

arba

$$\begin{aligned}k&=\frac{1}{2}[(k+1)\cdot k-k\cdot(k-1)]\\&=\frac{(k+1)\cdot k}{2}-\frac{k\cdot(k-1)}{2}.\end{aligned}$$

Jei $f(k)=k,$ tai $g(k)=\dfrac{k\cdot(k-1)}{2}$. Tada suma

$$\begin{aligned}s(n)&=g(n+1)-g(1)\\&=\frac{(n+1)n}{2}-\frac{1\cdot 0}{2}\\&=\frac{(n+1)n}{2}.\end{aligned}$$

Pabandykime idėją pritaikyti šiek tiek bendresniam atvejui, kai $f(k)=k(k-1).$

$$\begin{aligned}k(k-1)&=[(k+1)-k]k(k-1)\\&=(k+1)k(k-1)-k\cdot k(k-1)\\&=(k+1)k(k-1)-k(k-1+1)(k-1)\\&=(k+1)k(k-1)-k\cdot(k-1)(k-1)-k(k-1)\\&=(k+1)k(k-1)-k\cdot(k-1)(k-2+1)-k(k-1)\\&=(k+1)k(k-1)-k\cdot(k-1)(k-2)-k(k-1)-k(k-1)\\&=(k+1)k(k-1)-k\cdot(k-1)(k-2)-2k(k-1)\end{aligned}$$

Perkėlę paskutinį dėmenį iš paskutinės eilutės į kairiąją lygybęs pusę, gauname

$$3k(k-1)=(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)$$

arba

$$k(k-1)=\frac{1}{3}[(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)],$$

Padalinę abi lygybės puses iš $1\cdot 2$, gauname

$$\binom{k}{2}=\binom{k+1}{3}-\binom{k}{3}.$$

Tai mums gerai žinomas binominių koeficientų sąryšis $\binom{k+1}{3}=\binom{k}{3}+\binom{k}{2}$, tik truputį kitaip užrašytas. Taigi, jei $f(k)=\dfrac{k(k-1)}{2},$ tai $g(k)=\dfrac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$ Tada

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}=g(n+1)-g(2)$$
$$=\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{2\cdot 1\cdot 0}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$=\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

6. Užduotis. Dar viena suma (Vandermondo sąsūka).

$$\sum_{j\le k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}=\binom{n+m}{k}.$$

Tai nelengvas uždavinys. Pirmiausiai reikia nurodyti sumavimo indekso kitimo rėžius.