1. Pirmojo laipsnio funkcijos, tiesės lygtys

Pirmojo laipsnio funkcijos grafikas

Universitete mokymas iš esmės skiriasi nuo mokymo vidurinėje mokykloje. Pirmiausiai, tai skiriasi dėstymo griežtumas. Vidurinėje mokykloje yra labai mažai įrodymų. Studentai dažnai išsigąsta paties žodžio **įrodymas.** Kad būtų suprantamiau, panagrinėkime vieną pavyzdį. Matematinės analizės kalba yra perdėm geometriška. Analizinę arba algebrinę kalbą su geometrija sieja grafiko sąvoka. Labai dažnai mes turime kokią nors funkciją užrašytą formule $y = f(x)$, pvz.: funkciją $y = kx$. Tai viena iš paprasčiausių funkcijų, vadinamų tiesioginio proporcingumo fukcija. Jei turime funkciją, tai galima sudaryti skaičių porą (x; $f(x)$); šiai skaičių porai galima priskirti tašką koordinačių plokštumoje. Visų šių taškų aibė yra vadinama funkcijos $y = f(x)$ grafiku ir žymima

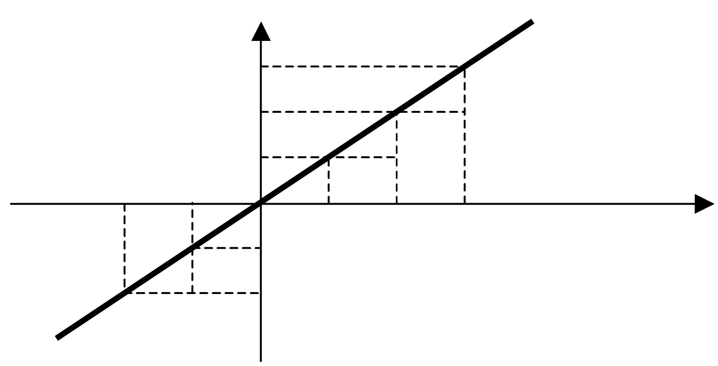
$$\text{Graph } (f) = \{(x; f(x)), x \in D(f)\},$$

čia $D(f)$ žymime funkcijos f apibrėžimo sritį. Grįžkime prie pavyzdžio, funkcijos $y = kx$. Sakykime, jūs žinote, galvojate, kad žinote arba girdėjote, kad funkcijos $y = kx$ grafikas yra tiesė. Pabandykime pasiaiškinti, kokio lygio yra jūsų žinojimas arba supratimas. Kaip turėtų atrodyti pavyzdinis įrodymas?

1. Sakykime, mes nieko nežinome apie funkcijos $y = kx$ grafiką. Pirmiausia reikia prisiminti grafiko apibrėžimą. Tai visuma (aibė) taškų su koordinatėmis (x; kx). Galima paimti keletą argumento reikšmių, apskaičiuoti atitinkamas funkcijos reikšmes. Geriausiai tas reikšmes surašyti į lentelę:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-2k	-k	0	k	2k	3k

Atidėkime taškus koordinačių plokštumoje su atitinkamomis koordinatėmis:



Matome, kad visi atidėtieji taškai yra vienoje tiesėje. Ar tikrai taip? Tai galima įsitikinti pasinaudojus stačiųjų trikampių lygumo požymiu. Ar gautoji tiesė yra mūsų funkcijos $y = kx$ grafikas? Panašu, kad taip. Galima pabandyti suformuluoti teiginį. Dar reikia nusakyti tiesę. Iš geometrijos žinome, kad tiesei nusakyti pakanka dviejų taškų. Kokius taškus reikėtų pasirinkti? Vieną – koordinačių pradžią, t.y. tašką, su koordinatėmis (0; 0). Kokį kitą? Geriausiai – patį paprasčiausią. Toks taškas galėtų būti (1; k). Dabar galima formuluoti teiginį:

1 teiginys. Funkcijos $y = kx$ grafikas yra tiesė, einanti per taškus (0; 0) ir (1; k).

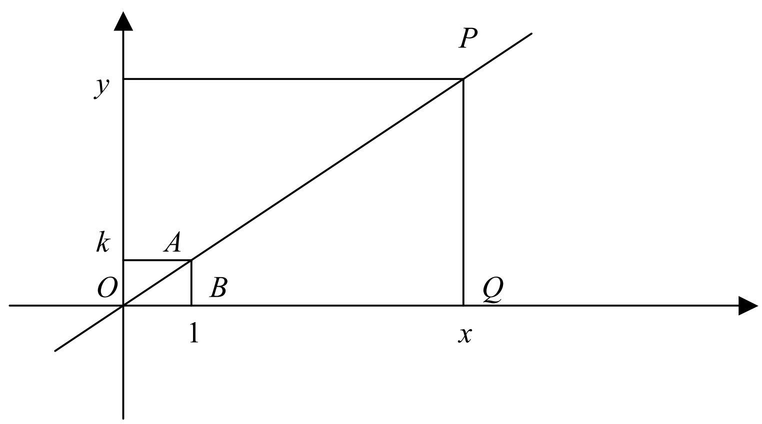
2. Teiginio formuluotės apmąstymas. Pirmiausia reikia suvokti, kad teiginio formuluotėje kalbama apie du skirtingus objektus plokštumoje:

- tiesę, einančią per taškus (0; 0) ir (1; k); pažymėkime ją raide l;
- funkcijos $y = kx$ grafiką, t.y. aibę taškų plokštumoje su koordinatėmis (x; kx), pažymėkime jį $graph(kx)$.

Reikia įrodyti, kad $l = graph(kx)$. Ką reiškia, kad dvi aibės lygios? Tai ekvivalentu dviem sąryšiams:

- $l \subset graph(kx) \Leftrightarrow$ tiesė yra grafiko poaibis $\Leftrightarrow$ kiekvienas tiesės l taškas $P = (x; y)$ yra funkcijos grafiko taškas $\Leftrightarrow$ bet kokio tiesės l taško $P = (x; y)$ kordinatės tenkina sąryšį $y = kx$.
- $graph(kx) \subset l \Leftrightarrow$ grafikas yra tiesės poaibis $\Leftrightarrow$ kiekvienas grafiko taškas yra ir tiesės l taškas $\Leftrightarrow$ taškas su koordinatėmis (x; kx) yra tiesėje l.

3. Sąryšio $l \subset graph(kx)$ įrodymas. Nusibrėžkime brėžinį.



Kampai $\angle AOB = \angle POQ, \angle OBA = \angle OQP = 90^\circ$

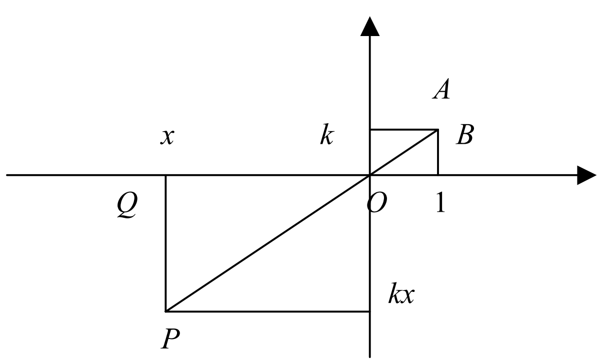
$\Rightarrow$ Trikampiai panašūs $\triangle AOB \sim \triangle POQ$

$\Rightarrow \dfrac{PQ}{OQ} = \dfrac{AB}{OB}$

$\Rightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{k}{1}$

$\Rightarrow y = kx$

4. Sąryšio $graph(kx) \subset l$ įrodymas.Tai ekvivalentiška $P \in graph(kx) \Rightarrow P \in l$.
Nubrėžkime brėžinį



$AB = k, OB = 1, PQ = -kx, OQ = -x$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{k}{1} = k, \dfrac{PQ}{OQ} = \dfrac{-kx}{-x} = k, \angle OBA = \angle OQP$

$\Rightarrow$ Trikampiai panašūs $\triangle AOB \sim \triangle POQ$

$\Rightarrow$ Kampai lygūs $\angle AOB = \angle POQ$

$\Rightarrow$ Taškai *P*, *O* ir *A* yra vienoje tiesėje.

5. Pabaigti įrodymą galima ir prieštaros būdu, t.y. įrodyti, kad $P \notin l \Rightarrow P \notin graph(kx)$. Tai labai suvokiama geometriškai. Mes jau įrodėme (3 dalyje), kad tiesė *l* yra grafiko dalis. Jei įrodysime, kad tiesei *l* nepriklausantys taškai nėra ir grafiko taškai, tai ir reikš, kad tiesė sudaro visą funkcijos grafiką.

<u>1 užduotis</u>. Įrodykite, kad funkcijos $y = kx + b$ grafikas yra tiesė, einanti per taškus $(0;b)$ ir $(1;k+b)$.

Įrodžius šį bendresnį teiginį, galima pakoreguoti terminologiją:

- Pirmojo laipsnio funkcija $y = kx + b$ vadinama tiesine, nes jos grafikas yra tiesė.
- Tiesė, kuri yra yra funkcijos $y = kx + b$ grafikas, vadinama paprastai "tiesė $y = kx + b$".

Koeficientų *k* ir *b* analizinė ir geometrinė prasmė

Analizinė prasmė. Pažymėkime $f(x) = kx + b$. Tada

- $b = k \cdot 0 + b = f(0)$, t.y. funkcijos reikšmė taške 0.
- $k = k \cdot 1 + b - b = (k \cdot 1 + b) - (k \cdot 0 + b) = f(1) - f(0)$ arba $f(x+1) - f(x) = k(x+1) + b - kx - b = k$, t.y koeficientas *k* yra funkcijos reikšmių prieaugis, kai argumentas pakinta vienetu. Tai galima vadinti ir funkcijos kitimo greičiu.

Geometrinė prasmė. Pirmoje užduotyje teigiama, kad funkcijos $y = kx + b$ grafikas eina per tašką $(0;b)$, taigi

- *b* yra ordinatė taško, kuriame tiesė (funkcijos $y = kx + b$ grafikas) kerta ordinačių ašį.

Nubrėžkime tiesę plokštumoje, ne vertikalią ir ne horizontalią. Kokia yra svarbi tiesės charakteristika? Jos pasvirimas – kampas su abscise. Kuo galima išreikšti šį pasvirimą? Jei paimsime tiesėje taškus $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ ir tašką $C(x_2; y_1)$, tai stačiojo trikampio *ABC* statinių santykis $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ nepriklauso nuo konkrečių taškų parinkimo. (galima įrodyti naudojantis trikampių panašumu). Šiuo santykiu galime apibrėžti tiesės *l* **posvyrį**

$$posv(l) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

(plg. agl. *slope*, vok. *Anstieg*, rus. *Наклон*). Jis rodo, kiek tiesė yra pasvirusi į abscisių ašį.

Laikykime, kad pasirinktoji tiesė yra funkcijos $y = kx + b$ grafikas. Tada

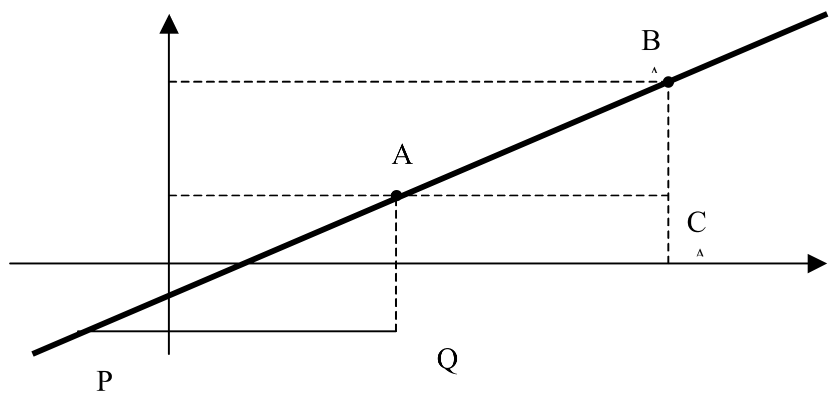
- $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{kx_2 + b - kx_1 - b}{x_2 - x_1} = \dfrac{k(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = k$.

Gavome, kad funkcijos $y = kx + b$ koeficientas *k* lygus grafiko posvyriui, t.y. $k = posv(graph(kx))$.
Be to, algebriniai skaičiavimai dar sykį įrodo, kad šis santykis nepriklauso nuo taškų parinkimo tiesėje.

Tiesės lygtis. Mes iki šiol pradėdavome algebra, t.y. turėdavome algebrinį objektą - funkciją $y = kx + b$ ir jai priskirdavome geometrinį objektą - tiesę, kaip funkcijos grafiką. Galima kelti ir atvirkščią klausimą. Turime tiesę. Kokius sąryšius tenkina tiesės taškų koordinatės? Tas sąryšis vadinamas tiesės lygtimi. Kaip ją surasti? Tiesę galima nusakyti įvairiais būdais:

1. dviem taškais $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$,
2. tašku ir posvyriu,
3. ir dar daug būdų, kurių čia nenagrinėsime.

<u>2 užduotis</u>. Nusakykite tiesę kitais būdais ir parašykite atitinkamas lygtis.
1. Sakykime, kad tiesė yra apibrėžta dviem taškais $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$. Jei tie taškai yra $(0;0), (1;a)$, tai atsakymas $y = ax$.
Jei taškai $(0;b), (1;c)$, tai antrojo taško koordinates pertvarkome $(1;c) = (1; b + (c - b))$.
Tada lygtis bus $y = (c - b)x + b$.
Ką daryti tuo atveju, kai taškų abscisės nėra 0 ir 1? Galimi du mąstymo būdai – geometrinis ir algebrinis. Pradėkime geometriniais samprotavimais.



Jei taškas *P* priklauso tiesei, einančiai per *A* ir *B*, tai trikampiai *ABC* ir *PQA* yra panašūs. Tada $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AQ}{PQ}$ arba

$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y}{x_1 - x}$. Jei dešinėje lygybės pusėje skaitiklį ir vardiklį padauginsime iš –1, tai gausime

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Atvirkščiai, jei taško *P* koordinatės tenkina pastarąjį sąryšį, tai $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AQ}{PQ}$ ir pagal stačiųjų trikampių panašumo požymį trikampiai *ABC* ir *PQA* yra panašūs. Tada kampai *BAC* ir *APQ* yra lygūs. Tai gali būti tik tada, kai visi trys taškai yra vienoje tiesėje.

Algebriniai samprotavimai. Gal egzistuoja tokia funkcija $y = kx + b$, kurios grafikas yra tiesė, einanti per taškus $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$? Tokiu atveju taškų koordinatės turi tenkinti lygtį $y = kx + b$, t.y.

$$y_1 = kx_1 + b,$$
$$y_2 = kx_2 + b.$$

Į šias dvi lygybes galime žiūrėti, kaip į lygčių sistemą nežinomųjų *k* ir *b* atžvilgiu ir ją išspręsti.

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Jei $x_1 \neq x_2$ (taškai nėra tiesėje, lygiagrečioje ordinačių ašiai), tai

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Tada

$$b = y_1 - kx_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1},$$
$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Pastaroji lygtis yra natūralus atsakymas. Mes ieškojome lygties tokios formos $y = kx + b$. Matome, kad atsakymas nėra patrauklus, nes koeficiento *b* išraiška nesuprantama. Kyla keletas klausimų:

- Ar gavome tą pačią lygtį?
- Kurie samprotavimai labiau priimtini?

<u>3 užduotis</u>. Sakykime, tiesė nusakyta tašku $(x_1; y_1)$ ir posvyriu *k*. Samprotaudami algebriškai ir geomteriškai išveskite tokios tiesės lygtį

$$y = y_1 + k(x - x_1).$$

Funkcija, lygtis, atvirkštinė funkcija.

Parašykime keletą stulpelių lygybių

$y = kx,$	$y = 2x + 4,$	$y = kx + b,$
$y - kx = 0,$	$y - 2x - 4 = 0,$	$y - kx - b = 0,$
$kx - y = 0,$	$2x - y + 4 = 0,$	.. $kx - y + b = 0,$
$kx = y,$	$2x = y - 4,$	$kx = y - b,$
$x = \frac{1}{k} y, k \neq 0.$	$x = \frac{1}{2} y - 2.$	$x = \frac{1}{k} y - \frac{b}{k}, k \neq 0.$

Pirmosios lygybės reiškia funkcijas, kartais sakysime – tiesiogines funkcijas. Visas lygybes galime vadinti ir lygtimis. Kiekvieno stulpelio visos lygybės išreiškia tam tikrą (beje, tą patį) sąryšį tarp dviejų kintamųjų – *x* ir *y*. Paskutiniosios lygybės reiškia ir funkcinę priklausomybę – kintamasis *x* yra išreikštas kaip kintamojo *y* funkcija. Ji vadinama atvirkštine (pirmajai – tiesioginei) funkcija.

Sakykime, turime pirmojo laipsnio lygtį su dviem nežinomaisiais $ax + by + c = 0,\ a \neq 0$ arba $b \neq 0.$ Tada iš jos galima išspręsti

- $y = -\frac{b}{a} x - \frac{c}{a}, a \neq 0$ arba
- $x = -\frac{a}{b} y - \frac{c}{b}, b \neq 0.$

Abiem atvejais gauname **pirmojo laipsnio funkcijas**, kurių grafikai yra tiesės. Vadinasi, bendra pirmojo laipsnio lygtis su dviem nežinomaisiais nusako tiesę. Todėl

mes galime sakyti “tiesė $ax+by+c=0$”, turėdami galvoje tą plokštumos taškų aibę, kurią apibrėžia duotoji lygtis.
Terminologiniai niuansai. Mes galime sakyti:

- funkcija $y=kx+b$,
- lygtis $y=kx+b$,
- tiesė $y=kx+b$,

kiekvieną sykį pabrėždami kitą tos pačios algebrinės išraiškos aspektą.

Finansų matematika.
Paprastosios palūkanos. Pagrindinės sąvokos:
Kapitalą, išreikštą piniginiais vienetais; žymėsime raide *C* (angl. capital) arba *P* (angl. principal). Paskolinto kapitalo didumas po *n* periodų vadinamas **sukauptąja verte** ir žymimas *C* (*n*). Jei $C=1$, tai sukauptoji vertė žymima $A(n)$ (accumulation factor) ir vadinama **kaupimo funkcija**. Tada

$$C(n)=C\cdot A(n)$$

Sukauptosios vertės ir pradinio kapitalo skirtumas vadinamas **palūkanomis** (interest).

$$I_n=C(n)-C(n-1).$$

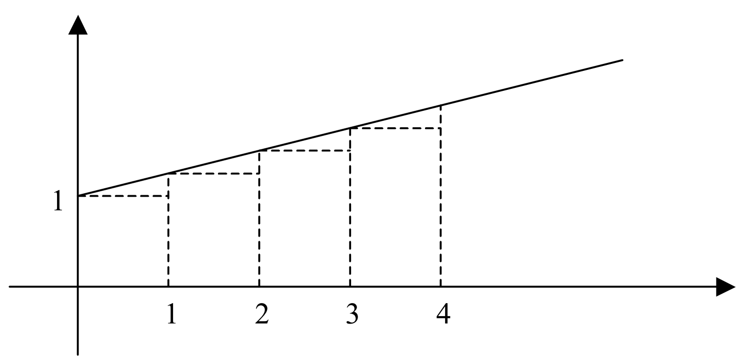
Vieno piniginio vieneto palūkanos per vieną periodą vadinamos **palūkanų norma** (rate of interest) ir žymima i_n, t.y.

$$i_n=\frac{I_n}{C(n-1)}=\frac{C(n)-C(n-1)}{C(n-1)}.$$

Jeigu palūkanos skaičiuojamos pagal dėsnį

$$A(t)=1+it,$$

čia *t* – laikas išreikštas metais (arba kitais laiko vienetais) ir nebūtinai sveikas skaičius, tai sakome, kad **palūkanos** yra **paprastosios** (simple interest). Tada kaupimo fukcijos, kai palūkanos skaičiuojamos bet kokiu laiku, grafikas atrodys taip



Be žinomų funkcijos $A(t)=1+it$ koeficiento *i* analizinės bei geometrinės prasmių galime pridėti jo finansinę prasmę – tai palūkanų norma. Praktikoje paprastųjų palūkanų modelis retai taikomas. Dažniausiai, kai laikas yra nedidelis, t.y. skolinamasi trumpam laikotarpiui. Kad būtų realiau, laikykime, kad laiko periodas yra diena. Be to, tiesės įvaizdis nėra visiškai tikslus. Realesnis modelis būtų toks: Pirmąją dieną dar nemokamos palūkanos. Grąžinant skolą bet kuriuo antrosios dienos metu, mokamos palūkanos *i*, grąžinant skolą bet kuriuo trečiosios dienos metu, mokamos palūkanos $2i$ ir t.t. Tada kaupimo funkcijos grafikas būtų ne tiesė, bet kažkas panašaus į laiptelius. Klausimas – kaip reikėtų užrašyti analiziškai tokią funkciją?

$f(x)=0, 0 \le x < 1,$
$f(x)=1, 1 \le x < 2,$
$f(x)=2, 2 \le x < 3,$
...
$f(x)=n, n \le x < n+1,$
Tokia funkcija turi savo pavadinimą ir žymėjimus. Deja, žymėjimų yra keletas:
$[x]$, klasikinis žymėjimas. Sakome – skaičiaus *x* sveikoji dalis.
$Ent(x)$ -prancūziškas žymėjimas. Entier – prancūziškai "sveikasis (skaičius)". Jis retai sutinkamas, nebent Prancūzijoje.
$\lfloor x \rfloor$ - naujas žymėjimas. Pirmą sykį šį žymėjimą ir funkcijos pavadinimą pavartojo Keneth Iverson 1962 m. Jis reikštų – skaičiaus grindys. Ši funkcija turi ir priešingą funkciją - $\lceil x \rceil$ - skaičiaus lubos.
Gali kilti klausimas – kuo blogas klasikinis žymėjimas, kodėl jį reikėtų keisti? Parašykime $[0,5]$. Ką tai galėtų reikšti? Ar tai skaičiaus $0,5$ sveikoji dalis ir ji lygi nuliui, ar tai uždaras intervalas nuo nulio iki penkių? Aišku, kad bet kokia dviprasmybė matematikoje yra nepageidautina.
Man asmeniškai patinka naujieji žymėjimai ir aš nusiteikęs juos vartoti. Taigi

$\lfloor x \rfloor =$ didžiausias sveikas skaičius, mažesnis arba lygus *x*; tai skaičiaus grindys;

$\lceil x \rceil =$ mažiausias sveikas skaičius, didesnis arba lygus *x*; tai skaičiaus lubos.

Tada kaupimo funkcija būtų užrašoma taip
$A(t)=1+i\lfloor t \rfloor, t \ge 0$.
Čia atsiranda subtilus skirtumas tarp keleto teorinių modelių

1. tolydaus, kai argumentas *t* kinta visame intervale $[0,+\infty)$,
2. diskretaus modelio, kai argumentas yra tik natūralieji skaičiai arba $t=nh$, kai *n* – natūralusis skaičius, o *h* – kažkoks fiksuotas žingsnis.
3. mišraus, kai argumentas kinta visame intervale $[0,+\infty)$, bet kažkas keičiasi tik sveikuose skaičiuose arba kažkokio žingsnio *h* kartotiniuose.

Paprastasis diskontas. (Žr. A. Bakščio "Finansų matematika")
Vertybinio popieriaus pirkimas, atskaitant dalį jo būsimos vertės, vadinamas diskontu (angl. discount – nuolaida, diskontas).
Vertybinio popieriaus pirkimo kaina vadinama diskontuotąja verte (discounted value).
Diskonto norma vadinama vieno periodo atskaitymo dalis nuo galutinės sumos (discount rate) ir žymima *d*; apskaičiuojama taip

$$d=\frac{C-P}{C}$$

Jei kapitalą *C* diskontuojame t laikotarpiui su diskonto norma *d*, tai diskontuota vertė apskaičiuojama pagal tokią formulę:

$$P=C(1-dt), 0 \le t \le \frac{1}{d}.$$

P – taip pat vadinama dabartine kapitalo *C* verte (present value)
Ryšys tarp palūkanų ir diskonto.
Sakykime, *P* ir *C* yra susiję per palūkanų normą *i* arba diskonto normą *d*. Mes vadinsime *P* – diskontuota arba dabartine *C* verte, o *C* – vadinsime sukauptąja *P* verte.
Palūkanų norma $i=\dfrac{C-P}{Pt}$,

Diskonto norma $d = \frac{C-P}{Ct}$.

Iš čia

$$d = \frac{C-P}{Ct} = \frac{C-P}{Pt} \cdot \frac{P}{C} = \frac{i}{\frac{C-P+P}{P}} = \frac{i}{1+\frac{C-P}{Pt}t} = \frac{i}{1+i \cdot t}.$$

Pasataroji formulė sako, kad diskonto norma yra palūkanų normos dabartinė vertė.

Analogiškai

$$i = \frac{C-P}{Pt} = \frac{C-P}{Ct} \frac{C}{P} = \frac{d}{\frac{P-C+C}{C}} = \frac{d}{1-\frac{C-P}{Ct}t} = \frac{d}{1-d \cdot t}.$$