VIENO UŽDAVINIO VARIACIJOS

Uždavinys 10.1. Apskaičiuokite ribą

$$\lim_{n\to\infty} nq^n, 0<q<1.$$

Sprendimai.

1. Pažymėkime $x_n = nq^n$. Išsiaiškinkime, ar seka monotoniška. Tam galima tirti santykį

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)q^{n+1}}{nq^n} = \frac{n+1}{n}q = \left(1+\frac{1}{n}\right)q \tag{10.1}$$

arba skirtumą

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= (n+1)q^{n+1} - nq^n = q^n((n+1)q-n) \\ &= q^n(n(q-1)+q) \end{aligned} \tag{10.2}$$

Aišku, kad santykio (10.1) riba yra lygi q. Bet $0<q<1$, tai nuo tam tikro N šis santykis bus mažesnis už 1 ir seka bus mažėjanti. Galime tą N ir tiksliai surasti

$$\begin{aligned} &\frac{n+1}{n}q<1, \\ &(n+1)q<n, \\ &\quad q<n-nq=n(1-q), \\ &\frac{q}{1-q}<n, N=\frac{q}{1-q}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Nagrinėkime skirtumą (10.2). Aišku, kad reiškinys paskutiniuose skliausteliuose nuo tam tikro N bus neigiamas. Galime jį surasti išsprendę nelygybę

$$\begin{aligned} &n(q-1)+q<0, \\ &\quad n(q-1)<-q, \\ &\qquad n>\frac{-q}{q-1}=\frac{q}{1-q}. \end{aligned}$$

Savaime aišku, kad gavome tą patį, ką ir nelygybėje (10.3). Taigi seka mažėja, kai $n>\frac{q}{1-q}$. Be to, seka aprėžta iš apačios nuliu. To užtenka, kad galėtume teigti, jog

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Iš (10.1) galime parašyti rekurentinę formulę

$$x_{n+1} = x_n\frac{n+1}{n}q = x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)q \tag{10.4}$$

arba kitaip

$$x_{n+1} = (n+1)q^{n+1} = nq^{n+1} + q^{n+1} = nq^n q + q^{n+1} = x_n q + q^{n+1}. \tag{10.5}$$

Pereikime prie ribos lygybėje (10.4)

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)q, \\ &\qquad a = a\cdot 1\cdot q, \\ &a(1-q)=0, 1-q\neq 0 \Rightarrow a=0 \end{aligned}$$

arba lygybėje (10.5)

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = q\lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} q^{n+1}, \\ &\qquad a = qa+0, \\ &a(1-q)=0 \Rightarrow a=0. \end{aligned}$$

2. Apibrėžkime naują seką

$$y_n = \sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{nq^n} = q\sqrt[n]{n}. \qquad (10.6)$$

Galime rasti naujos sekos ribą

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} q\sqrt[n]{n} = q. \qquad (10.7)$$

Kadangi $q<1$, tai galime rasti tokį teigiamą ε, kad $q+\varepsilon<1$. Pvz.: $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$. Tada iš sekos ribos apibrėžimo išplaukia, kad egzistuoja toks *N*, jog

$$n>N \Rightarrow q-\varepsilon < y_n < q+\varepsilon. \qquad (10.8)$$

Jei $q-\varepsilon<0$, tai apatinį įvertį galime pakeisti nuliu. Pakėlę nelygybę (10.8) n-tuoju laipsniu ir tur4dami galvoje lygybę $(y_n)^n = x_n$, gauname

$$(q-\varepsilon)^n < x_n < (q+\varepsilon)^n, n>N, \qquad (10.9)$$

Bet

$$\lim_{n\to\infty}(q-\varepsilon)^n = \lim_{n\to\infty}(q+\varepsilon)^n = 0, (0 \le (q-\varepsilon) < (q+\varepsilon) < 1,!) \qquad (10.10)$$

Remiamės dviejų policininkų principu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

3. Kadangi $q<1$, tai $\frac{1}{q}>1$. Galime parašyti $\frac{1}{q} = 1+a, a>0$. Tada seką $\{x_n\}$ galima perrašyti kitaip

$$x_n = nq^n = \frac{n}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} = \frac{n}{(1+a)^n}, a>0. \qquad (10.11)$$

Parašome Niutono binomo formulę

$$(1+a)^n = 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\ldots+a^n > \frac{n(n-1)}{2}a^2, \qquad (10.12)$$

$$\frac{1}{(1+a)^n} < \frac{2}{n(n-1)a^2}, n>1.$$

(10.13)

Įstatome nelygybę (10.13) į sekos išraišką (10.11)

$$0 < x_n = \frac{n}{(1+a)^n} < \frac{n\cdot 2}{n(n-1)a^2} = \frac{2}{(n-1)a^2}. \qquad (10.14)$$

Akivaizdu, kad

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)a^2} = 0.$$

Taigi ir $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Uždavinys 10.2 Spręskime sunkesnį uždavinį. Apskaičiuokite ribą

$$\lim_{n\to\infty} n^2 q^n, 0<q<1. \qquad (10.15)$$

Sprendimai. Šį uždavinį pabandysime spręsti tais pačiais metodais kaip ir ankstesnįjį. Be to, pabandysime pasinaudoti ankstesniojo uždavinio rezultatu.

1. Pažymėkime $z_n = n^2 q^n$. Pabandykime pasiaiškinti, ar seka nėra monotoniška. Tam galime nagrinėti santykį

$$\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{(n+1)^2q^{n+1}}{n^2q^n}=\frac{(n+1)^2q}{n^2}<1,$$
$$(n+1)^2q<n^2,$$
$$n^2(q-1)+2nq+q<1, \qquad (10.16)$$
$$n_{1,2}=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-q(q-1)}}{q-1}=\frac{-q\pm\sqrt{q}}{q-1}=\frac{q\pm\sqrt{q}}{1-q},$$
$$n_1=\frac{q-\sqrt{q}}{1-q},n_2=\frac{q+\sqrt{q}}{1-q}$$

Aišku, kad antroji šaknis yra didesnė už pirmąją ir kad kvadratinis trinaris bus neigiamas, kai $n>n_2$. Taigi seka $\{z_n\}$ bus mažėjanti, pradedant nuo nario z_{n_2}. Be to, akivaizdu, kad seka yra teigiama, t.y. aprėžta iš apačios. Tada egzistuoja riba

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}n^2q^n=b. \qquad (10.17)$$

Raskime rekurentinę formulę. Iš (10.16) galime gauti

$$z_{n+1}=z_n\frac{(n+1)^2}{n^2}q=z_n\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)q. \qquad (10.18)$$

Pereikime prie ribos šioje lygybėje

$$\lim_{n\to\infty}z_{n+1}=\lim_{n\to\infty}z_n\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)q,$$
$$b=b\cdot1\cdot q,$$
$$b(1-q)=0\Rightarrow b=0.$$

2. Pažymėkime

$$u_n=\sqrt[n]{z_n}=\sqrt[n]{n^2}q=\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}q \qquad (10.19)$$

Galime rasti sekos $\{u_n\}$ ribą

$$\lim_{n\to\infty}u_n=q\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}=q\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=q\cdot1\cdot1=q. \qquad (10.20)$$

Toliau reikia daryti visiškai taip pat, kaip ir uždavinio (10.1) antrajame sprendimo variante.

3. Kaip ir uždavinio (10.1) sprendime, pradinę seką parašykime kita forma

$$z_n=n^2q^n=\frac{n^2}{(1+a)^n},a>0. \qquad (10.21)$$

Naudokimės Niutono binomu

$$\begin{aligned}(1+a)^n&=1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3+...+a^n\\&>\frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3,\\ \frac{n^2}{(1+a)^n}&<\frac{n^2 6}{n(n-1)(n-2)a^3}=\frac{6n}{(n-1)(n-2)a^3},n>2,\\ 0<z_n&<\frac{6n}{(n-1)(n-2)a^3}\to0,n\to\infty.\end{aligned} \qquad (10.22)$$

4. Parašykime

$$n^2q^n=nq^{\frac{n}{2}}nq^{\frac{n}{2}}=n\left(\sqrt{q}\right)^n n\left(\sqrt{q}\right)^n=nq_1^n nq_1^n, \qquad (10.23)$$

čia $q_1=\sqrt{q}<1$. Sekai $\left\{nq_1^n\right\}$ galime taikyti rezultatą iš uždavinio (10.1), t.y.

$\lim\limits_{n\to\infty} nq_1^n = 0$. Tada

$$\lim_{n\to\infty} n^2 q^n = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{q}\right)^n n\left(\sqrt{q}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{q}\right)^n \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{q}\right)^n = 0\cdot 0 = 0 . \quad (10.24)$$

5. Parašykime seką panašiai kaip lygybėje (10.23)

$$z_n = n^2 q^n = nq^{\frac{n}{2}} nq^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} q^{\frac{n}{2}} \frac{n}{2} q^{\frac{n}{2}} \cdot 4 \quad (10.25)$$

Nagrinėkime seką

$$v_n = \frac{n}{2} q^{\frac{n}{2}} . \quad (10.26)$$

Pastebime, kad sekos $\{v_n\}$ lyginių narių posekis

$$v_{2k} = \frac{2k}{2} q^{\frac{2k}{2}} = kq^k = x_k$$

yra seka iš uždavinio (10.1). Žinome, kad

$$0 = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} v_{2k} . \quad (10.27)$$

Nagrinėkime sekos (10.26) nelyginių narių posekį

$$\begin{aligned} v_{2k+1} &= \frac{2k+1}{2} q^{\frac{2k+1}{2}} \\ &= \left(k + \frac{1}{2}\right) q^{k+\frac{1}{2}} \\ &= kq^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} q^{k+\frac{1}{2}} \\ &= kq^k \sqrt{q} + \frac{1}{2} q^k \sqrt{q} \end{aligned} \quad (10.28)$$

Apskaičiuojame posekio $\{v_{2k+1}\}$ ribą

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} v_{2k+1} &= \lim_{k\to\infty} kq^k \sqrt{q} + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} q^k \sqrt{q} \\ &= \sqrt{q} \lim_{k\to\infty} kq^k + \frac{1}{2}\sqrt{q} \lim_{k\to\infty} q^k \\ &= \sqrt{q}\cdot 0 + \frac{1}{2}\sqrt{q}\cdot 0 = 0 \end{aligned} \quad (10.29)$$

Jei lyginių ir nelyginių narių posekiai konverguoja į nulį, tai ir pati seka $\{v_n\}$ konverguoja į nulį. Lygybėje (10.25) pereikime prie ribos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} z_n &= \lim_{n\to\infty} n^2 q^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} q^{\frac{n}{2}} \frac{n}{2} q^{\frac{n}{2}} \cdot 4 \\ &= 4 \lim_{n\to\infty} v_n \lim_{n\to\infty} v_n \\ &= 4\cdot 0\cdot 0 = 0 \end{aligned} \quad (10.30)$$

Pastaba. Pritaikyti lygybę (10.25) pasiūlė Eugenija Kriščiukaitytė ir Dalia Ambroževičiūtė.

Uždavinys 10.3. Įvairiais būdais apskaičiuokite ribą

$$\lim_{n\to\infty} n^k q^n , 0 < q < 1, k \in \mathbb{N}.$$

Pastaba. Sekos monotoniškumą įrodyti būtų sunkiau, bet galima pabandyti indukcijos metodą. Kai $k = 1, k = 2$ uždavinys jau išspręstas.