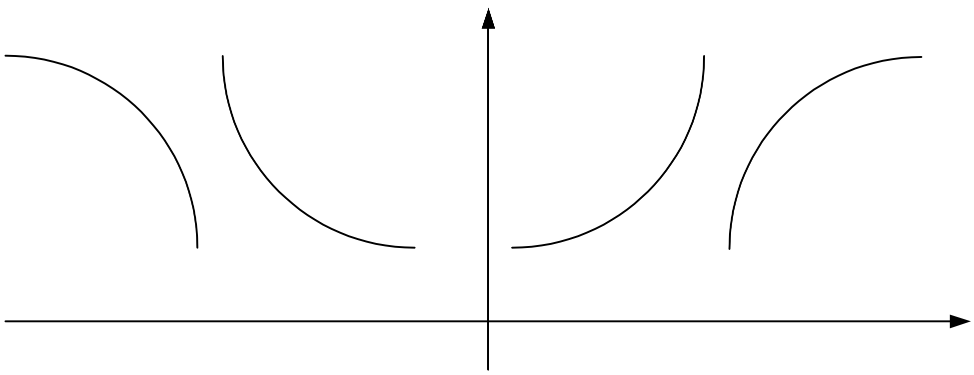
2.9. IŠKILUMAS

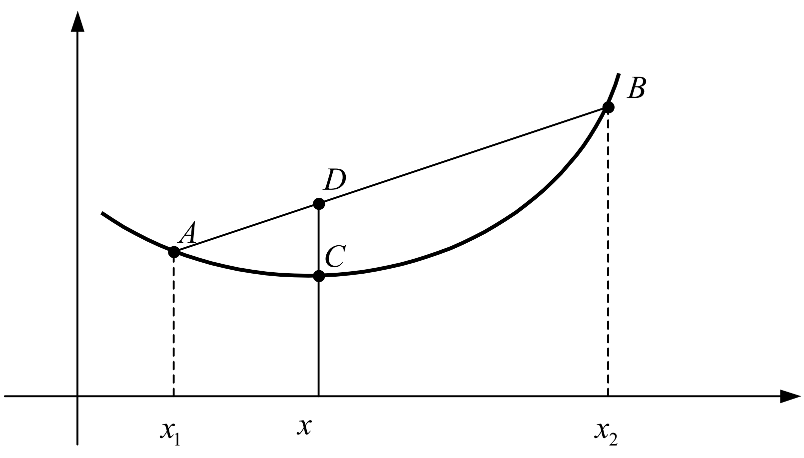
9.1. Įžangėlė. Labai dažnai prireikia brėžti funkcijų grafikus. Tam yra du svarbiausi būdai:

- Vienas – tai kompiuterinis. Parašai funkcijos analizinę išraišką ir kompiuteris nubrėžia grafiką. Kompiuteris labai greitai apskaičiuoja daug funkcijos reikšmių, taškus atideda monitoriaus ekrane ir atspausdina, jei reikia.
- Kitas – matematinis. Matematika (matematinė analizė) moko pamatyti svarbiausias funkcijos savybes – didėjimą, mažėjimą, maksimumus, minimumus, asimptotes ir t.t. Tam reikia mokėti tirti funkcijos išvestinę ir apskaičiuoti kai kurias ribas. Tada iš keleto charakteringų taškų galima nubrėžti teisingą funkcijos grafiko eskizą. Tačiau dažnai didėjimas ar mažėjimas dar ne viską pasako apie funkciją. Pažiūrėkime į pavyzdžius:



Kairiojoje pusėje yra mažėjančių funkcijų grafikai, o dešiniojoje – didėjančių. Bet matome, kad kreivių forma gana ryškiai skiriasi. Skiriasi jų charakteristika, vadinama *iškilumu*. Mūsų pirminiai samprotavimai remsis geometrinėmis idėjomis, vėliau jas užrašysime analizės kalba.
Matematinėje literatūroje yra truputį painiavos su terminologija. Mes susitarsime funkciją, kurios grafikas panašus į antrąjį ar trečiąjį, vadinti *iškiląja* (angl. *convex*, rus. *выпуклая*). Kartais tokia funkcija dar vadinama *iškila žemyn* (angl. *convex down*, *concave upward*, *convex-cup*).
Funkciją, kurios grafikas panašus į pirmąjį ar ketvirtąjį, vadinsime *įgaubtąja* (angl. *concave*, rus. *вогнутая*) arba *iškila aukštyn* (angl. *concave downward , convex up*, *convex-cap*).

9.2. Apibrėžimai. Sugriežtinsime geometrinius samprotavimus. Sakykime, turime funkciją *f*, apibrėžtą intervale *I.* Nusibrėžkime brėžinį:



Geometrinis apibrėžimas. *Funkciją f, apibrėžtą intervale I, vadinsime iškiląja, jei bet kokioms trims argumento reikšmėms* $x_1, x, x_2, x_1 < x < x_2$, *funkcijos grafiko taškas* $C(x; f(x))$ *bus žemiau (ne aukščiau) taško D, esančio atkarpoje, jungiančioje grafiko taškus* $A(x_1; f(x_1)), B(x_2; f(x_2))$.
Perveskime šį apibrėžimą į analizės kalbą. Apskaičiuokime taško *D* koordinates. Jo abscisė lygi *x*. Ordinatei surasti parašykime tiesės, einančios per taškus *A* ir *B*, lygtį:

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{9.1}$$

Išraišką, esančią lygties (9.1) dešinėje pusėje, pažymėkime $y_{AB}(x)$. Tada taško *D* ordinatė lygi

$$y_D = y_{AB}(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Frazė "taškas *C* yra žemiau taško *D*" algebros kalba reiškia nelygybę

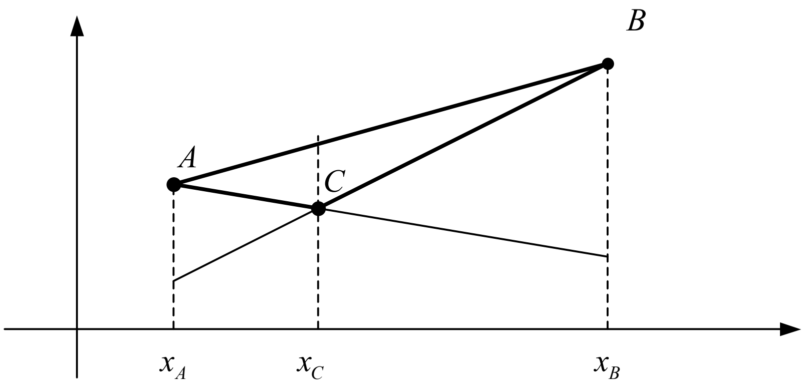
$$\begin{aligned} f(x) &\le f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ &= f(x_1)\left(1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) + f(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2). \end{aligned}$$

Analizinis apibrėžimas. *Funkciją f, apibrėžtą intervale I, vadinsime iškiląja, jei bet kokioms trims argumento reikšmėms* $x_1, x, x_2, x_1 < x < x_2$, *galios nelygybė*

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2). \tag{9.2}$$

Tiesiogiai patikrinti nelygybę (9.2) nėra paprasta. Norėsime gauti paprastą analizinį funkcijos iškilumo kriterijų. Įvairių samprotavimų metu naudosime geometrinę ir algebrinę-analizinę kalbas. Suformuluosime labai paprastą lemą, surišančią šias kalbas.

9.3. Lema (N. Burbaki, Funkcii deistvitelnogo peremennogo, psl.55**).** *Sakykime,* $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$ *- trys taškai, tenkinantys sąlygą* $x_A < x_C < x_B$.



Tada šios sąlygos ekvivalenčios:

1. *Taškas C yra žemiau atkarpos AB.* 2. *Taškas B yra virš tiesės, einančios per taškus A ir C.* 3. *Taškas A yra virš tiesės, einančios per taškus B ir C.*	4. $\text{posv}(AC) < \text{posv}(AB)$. 5. $\text{posv}(AB) < \text{posv}(BC)$. 6. $\text{posv}(AC) < \text{posv}(BC)$.

Įrodymas. Geometriškai šių sąlygų ekvivalentiškumas yra akivaizdus. Tačiau pademonstruosime vieną pavyzdį, kaip tai įsitikinti analiziškai. Parašykime funkciją

$$y_{AB}(x) = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A).$$

Tada pirmoji sąlyga analiziškai atrodys taip:

$$y_C < y_{AB}(x_C),$$

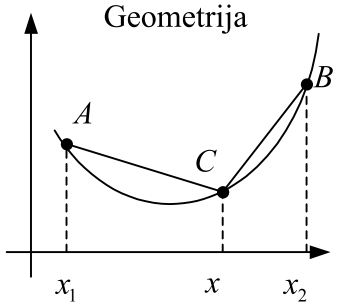
$$y_C < y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_C - x_A),$$

$$y_C - y_A < \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_C - x_A),$$

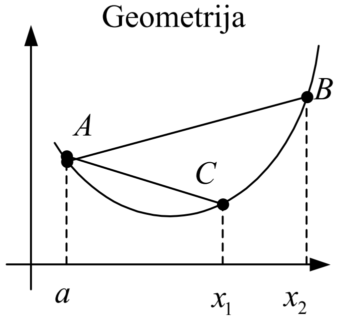
$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} < \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

$$\mathrm{posv}(AC) < \mathrm{posv}(AB).$$

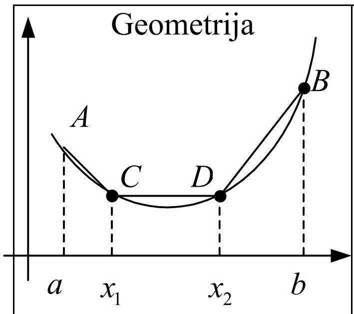
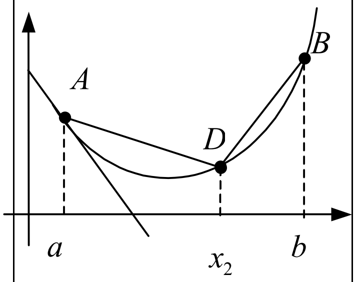
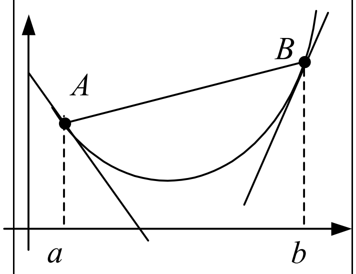
Įrodėme, kad iš sąlygos (1) išplaukia (4). Analogiškai galima įrodyti bet kurių sąlygų ekvivalentumą.
Matome, kad geometrinė iškilumo sąlyga lemos formuluotės atveju reiškia sąlygą (1).
Lema sako, kad iškilumo sąlygą galima pasakyti šešiais ekvivalenčiais būdais.
9.4. Ekvivalentiški iškiliųjų funkcijų apibrėžimai. Parašykime (6) lemos sąlygą trimis kalbomis:

Geometrija	Geometrija- algebra	Algebra-analizė
	$\mathrm{posv}(AC) < \mathrm{posv}(CB)$	$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ (9.3)

Analogiškai užrašykime (4) lemos sąlygą.

Geometrija	Geometrija- algebra	Algebra-analizė
	$\mathrm{posv}(AC) < \mathrm{posv}(AB)$, $a < x_1 < x_2$	$\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} < \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a}$. Funkcija, apibrėžta lygybe $\mathrm{Posv}(f; a; x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, didėjanti, kai $x > a$.

9.5. Diferencijuojamų funkcijų iškilumo kriterijai.
Teorema. *Sakykime, funkcija f yra diferencijuojama intervale I. Ji iškila tada ir tik tada, kai jos išvestinė yra didėjanti.*
Įrodymas. Būtinumas. Laikykime, kad $a < b$ iš intervalo *I*. Paimkime dar du taškus $x_1, x_2, a < x_1 < x_2 < b$.

Geometrija	Geometrija-algebra	Algebra-analizė
	posv(AC) < posv(CD), posv(CD) < posv(DB)	$\dfrac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} < \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \dfrac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2}$. Pereikime prie ribos, kai $x_1 \downarrow a$. Kadangi funkcija f diferencijuojama, tai viršutinio kairiojo santykio riba yra funkcijos išvestinė taške a, o funkcija tolydi. Todėl
	posv($liest(A)$) < posv(AD), posv(AD) < posv(DB).	$f'(a) < \dfrac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}$, $\dfrac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a} < \dfrac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2}$. Pereikime prie ribos, kai $x_2 \uparrow b.$ Tada
	posv($liest(A)$) < posv(AB), posv(AB) < posv($liest(B)$).	$f'(a) < \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(b).$ (9.4) Vadinasi, išvestinė didėjanti.

Pakankamumas. Paimkime tris intervalo I taškus $x_1, x_2, x_3, x_1 < x_2 < x_3$. Pagal Lagranžo teoremą egzistuoja tokie $c_1, c_1 \in (x_1; x_2), c_2, c_2 \in (x_2; x_3)$, kad

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c_1), f'(c_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{9.5}$$

Kadangi funkcijos išvestinė didėjanti, o $c_1 < x_2 < c_2$, tai $f'(c_1) < f'(c_2)$ ir

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

Iš sąlygos (9.3) išplaukia, kad funkcija iškila.

9.6. Geometrinis diferencijuojamų funkcijų iškilumo kriterijus.

Teorema. *Diferencijuojama funkcija iškila tada ir tik tada, kai jos grafikas yra aukščiau liestinės, nubrėžtos bet kokiame grafiko taške.*

Įrodymas. Būtinumas. Pasirinkime bet kokį intervalo I tašką a ir imkime $x, x > a$. Jei funkcija iškila, tai teisingos nelygybės (9.4). Parašykime kairiąją šios nelygybės pusę, su $b = x$ ir ją pertvarkykime

$$f'(a) < \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$
$$f'(a)(x-a) < f(x)-f(a), \tag{9.6}$$
$$f(a)+f'(a)(x-a) < f(x).$$

Paskutinioji nelygybė ir reiškia, kad funkcijos grafikas yra aukščiau liestinės, einančios per tašką $(a; f(a))$.

Jei $x < a$, tai reikėtų paimti dešiniąją nelygybės (9.4) pusę su $b = a$, o $a = x$. Gautume

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} < f'(a),$$
$$f(a)-f(x) < f'(a)(a-x), \tag{9.7}$$
$$f(a)-f'(a)(a-x) < f(x),$$
$$f(a)+f'(a)(x-a) < f(x).$$

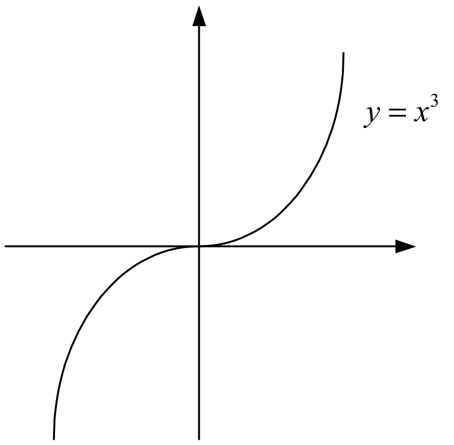
Pakankamumui įrodyti reikėtų nelygybes (9.6) ir (9.7) rašyti atvirkščia tvarka.

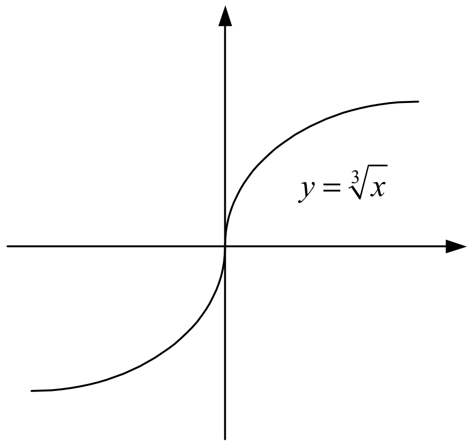
9.7. Dukart diferencijuojamų funkcijų iškilumo kriterijus.
Teorema. *Sakykime, funkcija dukart diferencijuojama intervale I. Ji iškila tada ir tik tada, kai* $f''(x) \ge 0$.
Įrodymas. Jei funkcija iškila, tai jos išvestinė didėjanti. Tada antroji išvestinė $f''(x) \ge 0$. Jei antroji išvestinė tenkina sąlygą $f''(x) \ge 0$, tai pirmoji išvestinė yra didėjanti. Tada funkcija iškila.

Užduotis. Performuluokite visus apibrėžimus ir teiginius įgaubtosioms funkcijoms ir viską įrodykite.

9.8. Perlinkio taškai. Išsiaiškinome, kad iškilų ir įgaubtų funkcijų grafikai labai skiriasi. Taškai, kur grafikas keičia iškilumą, turi specialų pavadinimą.
Apibrėžimas. *Taškas x_0, kuriame funkcija keičia iškilumą, vadinamas funkcijos* ***perlinkio*** *tašku (angl. point of inflexion ar inflection, rus. точка перегиба).*
Natūralu tikėtis, kad funkcija perlinkio taškuose turėtų tenkinti sąlygą $f''(x) = 0$.
Pavyzdžiai. $y_1 = x^3, y_2 = \sqrt[3]{x}$.

$$y_1' = 3x^2, y_1'' = 6x,$$
$$y_2' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, y_2'' = -\frac{2}{3\cdot 3}x^{-\frac{5}{3}}.$$





Taškas $x = 0$ yra perlinkio taškas abiem funkcijom. Pirmoji funkcija, iš tikrųjų, tenkina sąlygą $y_1''(0) = 0$, tačiau antroji funkcija taške $x = 0$ nėra diferencijuojama.
Teorema. *Jei funkcija f turi antrąją išvestinę perlinkio taško x_0 aplinkoje, tai* $f''(x_0) = 0$.

Įrodymas toks pat, kaip Ferma teoremos. Sakykime, funkcija iškila, kai $x < x_0$ (tada f' didėja) ir įgaubta, kai $x > x_0$ (f' mažėja).

$$f''(x_0) = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

$$f''(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Iš abiejų nelygybių išplaukia, kad $f''(x_0) = 0$.

Pavyzdys $y_2 = \sqrt[3]{x}$ rodo, kad iškilumas gali keistis ir taškuose, kur antroji išvestinė yra begalinė.

9.9. Dar vienas apibrėžimas. Išraiška (9.2) iškilumo apibrėžime

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \ (x_1 < x < x_2),$$

buvo naudinga, kai dirbome su posvyriais. Tačiau paprastai ji užrašoma kitokia forma. Pažymėkime

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Lengva matyti, kad $0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1,2, \alpha_1 + \alpha_2 = 1, x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. Tada nelygybė (9.2) pasikeičia kita ir iškilumo apibrėžimas skamba taip:

Apibrėžimas. *Funkciją f, apibrėžtą intervale I, vadinsime iškiląja, jei bet kokioms dviems argumento reikšmėms* x_1, x_2 *ir neneigiamiems realiesiems skaičiams* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ *galioja nelygybė*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \tag{9.8}$$

9.10. Teorema (Jenseno nelygybė). *Jei funkcija f iškila intervale I,* $x_i \in I$, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_i \geq 0, i = 1,2,\dots,n$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, *tai*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i). \tag{9.9}$$

Kai $n = 2$, tai nelygybė (9.9) virsta iškilumo apibrėžimu, t.y. nelygybe (9.8).
Įrodymas indukcija paliekamas skaitytojui.

9.11. Aritmetinio – geometrinio vidurkių nelygybė. Imkime funkciją $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$. Žinome, kad $(e^x)' = e^x, (e^x)'' = (e^x)' = e^x > 0$. Taigi eksponentinė funkcija yra iškila. Paimkime $\alpha_i = \frac{1}{n}, i = 1,2,\dots,n$ ir pritaikykime Jenseno nelygybę

$$e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} e^{x_i},$$

$$e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{x_i},$$

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} e^{x_i}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} . \tag{9.10}$$

Pažymėję $e^{x_i} = a_i, i = 1,2,...,n$, gauname

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{9.11}$$

arba labiau pažįstamą aritmetinio–geometrinio vidurkių nelygybės išraišką

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_n} \le \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n) . \tag{9.12}$$

9.12. Iškilų monotoniškų funkcijų atvirkštinės. Sakykime, funkcija $y = f(x)$ iškila ir griežtai mažėjanti intervale *I*. Tada egzistuoja atvirkštinė $x = f^{-1}(y)$, apibrėžta intervale $J = f(I)$. Ištirsime atvirkštinės funkcijos iškilumą, naudodamiesi įvairiais iškilumo apibrėžimais ir kriterijais.

a) **Funkcija diferencijuojama.** Laikykime, kad $f'(x) < 0$ visiems $x \in I$. Galime rasti atvirkštinės funkcijos išvestinę

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}, y = f(x) . \tag{9.13}$$

Imkime $y_1, y_2 \in J, y_1 < y_2$. Tada egzistuoja tokie $x_1, x_2 \in I$, kad

$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ ir $x_1 > x_2$ (*f* – mažėjanti),

$f'(x_1) > f'(x_2)$ (f' didėjanti, nes *f* iškila),

$$\left(f^{-1}\right)'(y_1) = \frac{1}{f'(x_1)} < \frac{1}{f'(x_2)} = \left(f^{-1}\right)'(y_2) .$$

Vadinasi, funkcijos f^{-1} išvestinė didėjanti ir atvirkštinė funkcija iškila.

b) **Funkcija dukart diferencijuojama.** Iš formulės (9.13) galime rasti atvirkštinės funkcijos antrąją išvestinę

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)''(y) &= \left(\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\right)' = \left(\frac{1}{f'(x)}\right)'_x \cdot \left(f^{-1}\right)'(y) \\ &= \frac{-f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \cdot \frac{1}{f'(x)} = \frac{-f''(x)}{\left(f'(x)\right)^3} , \end{aligned} \tag{9.14}$$

čia $y = f(x)$. Reiškinio (9.14) ženklas yra neneigiamas, nes $f'(x) < 0$, o $f''(x) \ge 0$. Todėl atvirkštinė funkcija iškila.

c) **Pagrindinis analizinis apibrėžimas.** Sakykime, $x_1, x_2 \in I$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ ir $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Laikykime, kad funkcija yra griežtai iškila. Tada

$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, (iškilumo apibrėžimas 9.9)

$f^{-1}(f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) > f^{-1}(\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2))$, ($f^{-1}$ - mažėjanti)

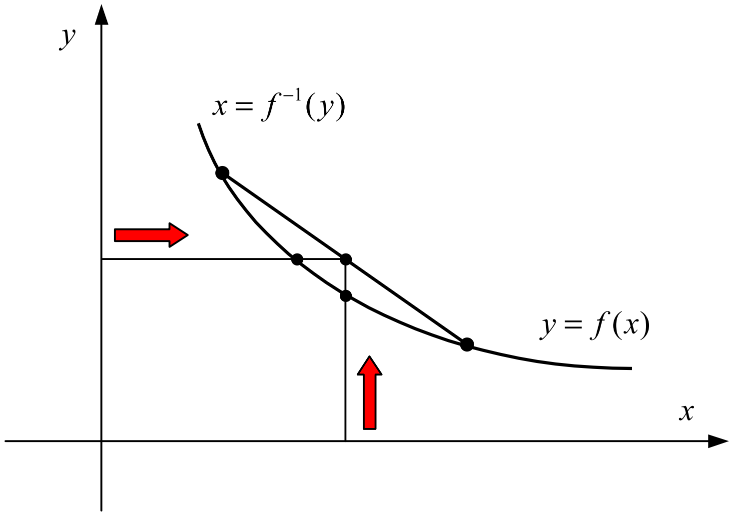
$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 < f^{-1}(\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2))$, ($f^{-1}(f(x)) = x$ visiems $x \in I$)

$\alpha_1 f^{-1}(y_1) + \alpha_2 f^{-1}(y_2) > f^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$, ($x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$)

$f^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) < \alpha_1 f^{-1}(y_1) + \alpha_2 f^{-1}(y_2)$.

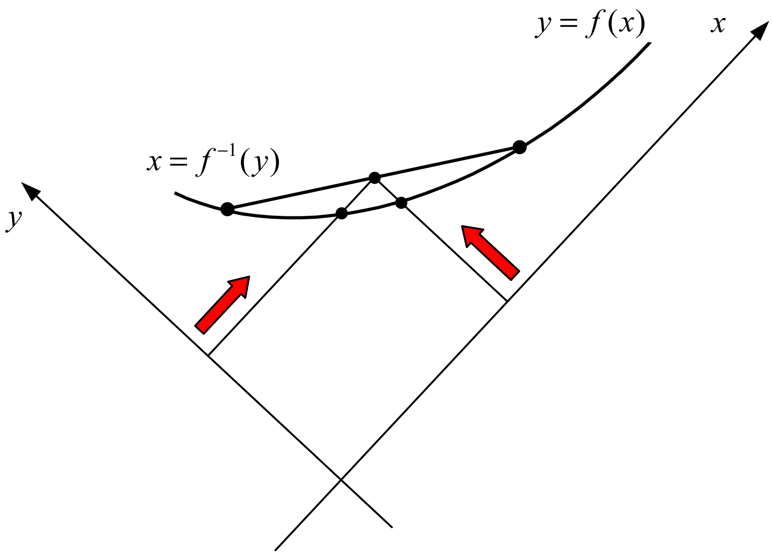
Paskutinioji nelygybė ir yra (griežto) iškilumo sąlyga atvirkštinei funkcijai f^{-1}.

d) **Pagrindinis geometrinis apibrėžimas.** Prisiminkime pagrindinį geometrinį iškilos funkcijos apibrėžimą 9.2. Kad viskas būtų paprasčiau, galime nešiūkšlinti sau galvų taškais su kintamaisiais ir indeksais. Nubrėžkime brėžinį.



Viso ko esmė yra ta, kad tiesioginės ir atvirkštinės funkcijų grafikai yra viena ir ta pati kreivė. Nieko naujo brėžti nereikia – tik pažiūrėti į grafiką ir stygą iš y-kų ašies ir pamatyti, kad funkcijos grafiko taškai bus žemiau atitinkamų stygos taškų. Taigi atvirkštinė funkcija šiuo atveju taip pat yra iškila.

Kam nepatinka žiūrėti į grafiką iš šono (iš y-kų ašies), siūlau brėžinį pasukti 45° kampu prieš laikrodžio rodyklę.



P.S. Jei rasite klaidų skyreliuose 2.8, 2.9 ar kontrolinio užduočių sprendimuose, praneškite. Tikėkitės, kad būsite įvertinti.