2.7. VIDURINIŲ REIKŠMIŲ TEOREMOS, JŲ TAIKYMAI

7.1. Ferma teorema. (Pierre de Fermat, 1601-1665, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fermat.html). Jei funkcija, apibrėžta intervale I vidiniame jo taške a turi lokalų maksimumą (ar minimumą) ir tame taške funkcija yra diferencijuojama, tai $f'(a)=0$.

Įrodymas. Sakykime, U yra taško a aplinka, kurioje $f(x)\le f(a), x\in U$. Tada

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le 0,\ \text{kai}\ ,x>a\ \text{ir}\ x\in U, \tag{7.1}$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ge 0,\ \text{kai}\ x<a\ \text{ir}\ x\in U. \tag{7.2}$$

Dėl to, kad funkcija diferencijuojama taške a, egzistuoja parašytų santykių nelygybėse (7.1) ir (7.2) ribos ir jos lygios funkcijos išvestinei taške *a.* Perėję šiose nelygybėse prie ribos, gausime

$$f'(a)\le 0, f'(a)\ge 0 \Rightarrow f'(a)=0.$$

7.2. Rolio teorema. (Michel Rolle, 1652-1719, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Rolle.html). Jei funkcija f tolydi uždarajame intervale $[a;b]$, diferencijuojama atvirajame intervale $(a;b)$ ir $f(a)=f(b)$, tai egzistuoja toks taškas $c, c\in(a;b)$, kad $f'(c)=0$.

Įrodymas. Iš Vejerštraso teoremos išplaukia, kad egzistuoja tokie c_m, c_M, kad

$$f(c_m)=\inf\{f(x); x\in[a;b]\}, f(c_M)=\sup\{f(x); x\in[a;b]\}.$$

Jei abu taškai c_m, c_M yra intervalo galai, tai funkcija yra pastovi. Tada kiekviename intervalo taške išvestinė yra lygi nuliui.

Jei bent vienas iš taškų c_m, c_M yra intervalo viduje, tai remiamės Ferma teorema ir gauname, kad išvestinė tame taške yra nulis.

7.3. Užduotis. Sukonstruokite kontrapavyzdžius Rolio teoremai, t.y. raskite tokias funkcijas, kurios netenkina kokios nors (bent vienos!) teoremos sąlygos. Tada nėra teisingas teoremos tvirtinimas.

7.4. Lagranžo teorema. (Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lagrange.html). Jei funkcija f tolydi uždarajame intervale $[a;b]$ ir diferencijuojama atvirajame intervale $(a;b)$, tai egzistuoja toks taškas $c, c\in(a;b)$, kad

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \tag{7.3}$$

arba

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \tag{7.4}$$

Lagranžo teorema yra labai plačiai taikomas matematinis instrumentas. Išraiška (7.4) turi labai aiškią geometrinę prasmę – taške $(c; f(c))$ liestinės posvyris yra lygus atkarpos, jungiančios funkcijos grafiko galus, posvyriui (liestinė lygiagreti tai atkarpai).

Lagranžo teorema kartais vadinama baigtinių pokyčių teorema, nes ji išreiškia funkcijos pokytį argumento pokyčio ir išvestinės sandauga.

Įrodymas. Įrodymo idėja labai paprasta – atliekama tiesinė funkcijos f transformacija, kad naujoji funkcija tenkintų Rolio teoremos sąlygas.

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,. \tag{7.5}$$

Labai lengva suskaičiuoti, kad $g(a) = g(b) = f(a)$ ir

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

7.5. Koši teorema. (Augustin Louis Cauchy, 1789-1857, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Cauchy.html). Jei funkcijos *f*, *g* tolydžios intervale $[a;b]$, diferencijuojamos intervale $(a;b)$, $g'(x)$ pastovaus ženklo visame intervale, tai egzistuoja tok taškas *c* iš intervalo vidaus, kad

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,. \tag{7.6}$$

Įrodymas. Įrodymo idėja tokia pat, kaip ir Lagranžo teoremos įrodymo - konstruojame funkciją, tenkinančią Rolio teoremos sąlygas.

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))\,. \tag{7.7}$$

Siūlau pabaigti įrodymą patiems.

7.6. Funkcijos monotoniškumas. Jei funkcijos *f* išvestinė intervale *I* pastovaus ženklo, tai funkcija tame intervale yra griežtai monotoniška.
Įrodymas. Sakykime, $f'(x) > 0, \forall x, x \in I$. Iš intervalo *I* paimkime du taškus $x_1, x_2, x_1 < x_2$. Lagranžo teorema teigia, kad atsiras toks $c(x_1, x_2), x_1 < c(x_1, x_2) < x_2$, jog

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c(x_1, x_2))(x_2 - x_1)\,. \tag{7.8}$$

Jei išvestinė visur teigiama, tai sandauga, esanti dešiniojoje lygybės (7.8) pusėje bus teigiama. Tada kairioji pusė bus teigiamas ir funkcija bus griežtai didėjanti.

7.7. Klausimas. Sakykime, funkcijos išvestinė yra pastovaus ženklo, išskyrus vieną, du ar bet kokį baigtinį skaičių taškų, kuriuose ji lygi nuliui. Ar galime teigti, jog funkcija yra griežtai didėjanti? Panagrinėkite pavyzdį $y = x^3, x \in \mathbb{R}$.

7.8. Liopitalio taisyklė(s). (Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital, 1661-1704, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/De_L'Hopital.html). Jei funkcijos *f*, *g* tolydžios intervale $(a;b]$, diferencijuojamos intervale $(a;b)$, $g'(x)$ pastovaus ženklo visame intervale, $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$ ir

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A\,, \tag{7.9}$$

tai

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A\,. \tag{7.10}$$

Įrodymas. Apibrėžkime funkcijas *f* ir *g* papildomai taške $x = a$, suteikdami abiem funkcijom reikšmes lygias nuliui. Tada abi funkcijos bus tolydžios intervale $[a;b]$ ir joms galėsime taikyti Koši teoremą:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-0}{g(x)-0}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c(a;x))}{g'(c(a;x))}, \tag{7.11}$$

čia $a<c(a;x)<x$. Kai $x\to a, x>a$, tai ir $c(a;x)\to a$. Todėl

$$\lim_{x\downarrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\downarrow a}\frac{f'(c(a;x))}{g'(c(a;x))}=\lim_{x\downarrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

Mes įrodėme paprasčiausią Liopitalio taisyklės variantą. Sudėtingesni atvejai, kai ribinis taškas yra begalinis ar funkcijų ribos begalinės yra labai gražiai išnagrinėti V.Kabailos "Matematinės analizės" 1-oje dalyje 116-118 psl. Tačiau aišku, kad svarbiausia sąlyga Liopitalio taisyklėse yra (7.9).

7.9. Pavyzdys. Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$$

Akivaizdu, kad patenkintos pirmosios Liopitalio teoremos sąlygos. Taisyklė taikoma taip: skaičiuojame išvestines skaitiklyje ir vardiklyje; jei išvestinių santykio ribą mokame apskaičiuoti, tai ji bus lygi ir funkcijų santykio ribai.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}{2\sqrt{1+x}}=\frac{3}{2}.$$

Taigi sąlygą (7.9) mes tikriname spręsdami uždavinį.

7.10. Atvirkštinės funkcijos išvestinė. Sakykime, funkcija *f* yra diferencijuojama intervale *I* ir išvestinė yra pastovaus ženklo visame intervale. Tada egziztuoja diferencijuojama atvirkštinė funkcija ir

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}, y=f(x), \forall y, y\in f(I). \tag{7.12}$$

Įrodymas. Sakykime, $f'(x)>0, \forall x, x\in I$. Tada funkcija yra griežtai didėjanti (teiginys 7.6) ir egzistuoja atvirkštinė funkcija f^{-1}, apibrėžta intervale $f(I)$.

Grafinis įrodymas. Fiksuokime tašką $x_0, x_0\in I$, nubrėžkime grafiko liestinę taške $(x_0;y_0), y_0=f(x_0)$. Liestinės posvyris yra $f'(x_0)$. Atvirkštinės funkcijos grafikas yra tas pats (!!!).Tame pačiame taške grafikas turi tą pačią liestinę. Tik atvirkštinės funkcijos nepriklausomas kintamasis yra *y*, o priklausomas kintamasis yra *x*. Todėl ir liestinės posvyriai į skirtingas koordinatines ašis turėtų tenkinti sąlygą

$$\text{posv}_y(liest)=\frac{1}{\text{posv}_x(liest)}, \tag{7.13}$$

čia indeksas *x* reikštų posvyrį į abscisę, o *y* – posvyrį į ordinatę. Jei perrašysime posvyrius išvestinių kalba, tai gausime sąlygą (7.12).

Analizinis įrodymas.

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} \quad \text{(išvestinės apibrėžimas)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \quad \text{(pakeičiame } y=f(x), y_0=f(x_0)\text{; kai}$$

$y\to y_0$, tai $x\to x_0$ dėl f^{-1} tolydumo)

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} \qquad (f^{-1}(f(x)) = x, f^{-1}(f(x_0)) = x_0)$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad (\exists f'(x_0) \text{ ir } f'(x_0) \neq 0)$$

7.11. Pavyzdžiai.

1. Natūralusis logaritmas. Funkcija $y = \exp(x)$ apibrėžta visoje tiesėje $\mathbb{R}$, jos reikšmių sritis $\exp(\mathbb{R}) = (0;+\infty)$. Išvestinė $y' = \exp(x) > 0, \forall x, x \in \mathbb{R}$. Taigi egzistuoja atvirkštinė funkcija $f^{-1}: (0;+\infty) \to (-\infty;+\infty)$, kuri turi savo žymėjimą ir pavadinimą – natūralusis logaritmas

$$f^{-1}(y) = \ln y. \tag{7.14}$$

Remiantis teiginiu 7.10, apskaičiuokime atvirkštinės funkcijos išvestinę

$$\ln' y = (\ln y)' = (\exp^{-1})'(y) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{y}.$$

Arba pakeitę argumentų žymėjimus, gauname

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0. \tag{7.15}$$

2. Arktangentas. Nagrinėkime funkciją $y = \operatorname{tg} x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Funkcijos išvestinė $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$. Vadinasi, funkcija griežtai didėjanti.

$$\lim_{x\downarrow -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty, \lim_{x\uparrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

Egzistuoja atvirkštinė, apibrėžta intervale $(-\infty;+\infty)$, įgyjanti reikšmes intervale $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ir vadinama arktangentu $x = \operatorname{tg}^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$. Skaičiuokime išvestinę

$$\operatorname{arctg}'(y) = (\operatorname{tg}^{-1})'(y) = \frac{1}{\operatorname{tg}' x} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Pakeiskime argumentus

$$\operatorname{arctg}'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}. \tag{7.16}$$

Patys išveskite formules

3. Arksinusas.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1. \tag{7.17}$$

4. Arkkosinusas.

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1. \tag{7.18}$$

5. Arkkotangentas.

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}. \tag{7.19}$$

Jei patiems neišeina išvesti šių formulių, tai suraskite jas kokiame nors vadovėlyje.

7.12. Laipsninė funkcija. Apibrėžiame

$$x^{\alpha}=\exp(\alpha\ln x)=e^{\alpha\ln x}, \alpha\in\mathbb{R}, x>0\,. \tag{7.20}$$

Patikrinkite, kad taip apibrėžta funkcija sutampa su įprasta laipsnine funkcija, kai $\alpha=\dfrac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{N}$. Galime apskaičiuoti išvestinę

$$\left(x^{\alpha}\right)'=\left(e^{\alpha\ln x}\right)'=e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'=x^{\alpha}\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}\,. \tag{7.21}$$

Kai $\alpha=n\in\mathbb{N}$, tai (7.21) sutampa su gerai žinoma iš mokyklinių laikų formule.

7.13. Kai kurios klasikinės ribos.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

Norėčiau pastebti, kad šių ribų statusas kai kuriuose matematinės analizės vadovėliuose yra visiškai kitas, nei mūsų kurse. Šios ribos tenai reikalingos eksponentinės ir su ja susijusių funkcijų išvestinėms apskaičiuoti. Mes eksponentinę funkciją apibrėžėme labai konstruktyviai. Jos išvestinę suradome taip pat nesunkiai. Mes naudosimės eksponentinės ir kitų funkcijų išvestinėmis. Atidžiai pažiūrėję į pirmąsias tris ribas, matome, kad tai yra funkcijų $y=a^x, y=(1+x)^{\alpha}, y=\ln(1+x)$ išvestinių taške $x=0$ apibrėžimai. Todėl iškart galime parašyti atsakymus

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left(a^x\right)'\Big|_{x=0}=a^x\ln a\Big|_{x=0}=\ln a\,. \tag{7.22}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\left((1+x)^{\alpha}\right)'\Big|_{x=0}=\alpha(1+x)^{\alpha-1}\Big|_{x=0}=\alpha\,. \tag{7.23}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln'(1+x)\Big|_{x=0}=\frac{1}{1+x}\Big|_{x=0}=1\,. \tag{7.24}$$

Apskaičiuokime paskutiniąją ribą

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}&=\lim_{x\to+\infty}\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) && \text{(funkcijų apibrėžimai)}\\
&=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) && \text{(funkcijos } y=\exp(x) \text{ tolydumas)}\\
&=\exp\left(\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}\right) && \text{(pakeičiame } \tfrac{1}{x}=u\text{)}\\
&=\exp(1)=e\,. && \text{(riba (7.24))}
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Pradinėje riboje gali $x\to-\infty$, nes ir tada $\dfrac{1}{x}=u\to 0$.

7.14. Finansų matematika. Situaciją finansų rinkoje galima nusakyti keletu parametrų. Labiausiai priimtas parametras realiajame pasaulyje – tai palūkanų norma. Tačiau teoriniuose darbuose labiausiai taikoma yra kita charakteristika. Sakykime, turime kaupimo funkciją $A(t)$, parametras t – tolydus, t.y. $t \in [0;+\infty)$. Skirtumas $A(t+h)-A(t)$ parodo absoliutųjį kapitalo prieaugį per laiko tarpą h, o santykis $\dfrac{A(t+h)-A(t)}{A(t)}$ - santykinį prieaugį. Jei $t=n, n\in \mathbb{N}$, o $h=1$, tai tas santykis ir yra įprasta palūkanų norma laiko momentu n. Sakykime, kad egzistuoja riba

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{A(t+h)-A(t)}{A(t)\cdot h}=\delta_t . \tag{7.26}$$

Ji vadinama *palūkanų galia* (*force of interest*). Jei kaupimo funkcija nusakyta formule $A(t)=e^{\delta t}$, tai

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{A(t+h)-A(t)}{A(t)\cdot h}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{e^{\delta(t+h)}-e^{\delta t}}{e^{\delta t}h}=\lim_{h\downarrow 0}\frac{e^{\delta h}-1}{h}=\delta . \tag{7.27}$$

Vadinasi, palūkanų galia yra pastovi ir lygi δ. Šiuo atveju galima parašyti sąryšį tarp palūkanų normos ir palūkanų galios

$$A(1)=e^{\delta}=1+i . \tag{7.28}$$

$$i=e^{\delta}-1; \delta=\ln(1+i) . \tag{7.29}$$

Pirmoje kurso dalyje skaičiavome ribą sekos $x_n=\left(1+\dfrac{i^{(n)}}{n}\right)^n$, kai $i^{(n)}$ - nominali palūkanų norma buvo pastovi, o perskaičiavimų skaičius neaprėžtai didėjo. Tada effektyvioji palūkanų norma i didėjo, didėjant n, ir buvo surandama iš sąryšio

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(n)}}{n}\right)^n . \tag{7.30}$$

Dabar laikykime, kad effektyvioji palūkanų norma i nekinta, o kinta nominalioji palūkanų norma, kurią galima rasti iš sąryšio (7.30)

$$\sqrt[n]{1+i}=1+\frac{i^{(n)}}{n},$$

$$i^{(n)}=n\left((1+i)^{\frac{1}{n}}-1\right).$$

Iš ribos (7.22) ir pagrindinės ribų teoremos išplaukia, kad

$$\lim_{n\to\infty} i^{(n)}=\lim_{n\to\infty} n\left((1+i)^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+i)^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln(1+i) . \tag{7.31}$$

Jei prisiminsime sąryšį (7.29), tai gausime

$$\lim_{n\to\infty} i^{(n)}=\ln(1+i)=\delta . \tag{7.32}$$

Jei kaupimo funkcija $A(t)$ diferencijuojama, tai sąryšį (7.26) galima perrašyti taip

$$\delta_t=\frac{1}{A(t)}\lim_{h\downarrow 0}\frac{A(t+h)-A(t)}{h}=\frac{A'(t)}{A(t)}=\left(\ln A(t)\right)' . \tag{7.33}$$