2.6. IŠVESTINĖ, DIFERENCIJAVIMAS

6.1. Išvestinės sąvoka. Funkcijos išvestinės sąvoka yra matematikos instrumentas, kurio reikšmę sunku įvertinti. Galbūt, tai galima palyginti su vidaus degimo variklio sukūrimu. Diferencijuoti paprasčiausias funkcijas (surasti jų išvestines) mokoma mokykloje. Griežtai apibrėžti išvestinę reikia griežtos ribos sąvokos. Geometrinė išvestinės prasmė susijusi su funkcijos grafiko liestine. Liestinę paprastom kreivėm galima apibrėžti ir be ribos. Senovės graikai mokėjo apibrėžti apskritimų ir kai kurių kitų kreivių liestines bei žinojo jų pagrindines savybes.
Sakykime, turime funkciją $y = f(x), x \in I$, čia I – intervalas.

- Nubrėžiame funkcijos f grafiką.
- Fiksuojame tašką $a, a \in I$ ir tašką grafike $(a; f(a))$.
- Pasirenkame tašką $x \in I, x \neq a$ ir tašką grafike $(x; f(x))$.
- Nubrėžiame grafiko kirstinę per pasirinktus taškus.
- Užrašome kirstinės posvyrį $\text{posv}(kirst) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
- Apskaičiuojame ribą (jei egzistuoja)
  $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{6.1}$$
- Ribą pavadiname funkcijos išvestine taške a, žymime $f'(a)$. Jei riba (6.1) egzistuoja, tai reiškia, kad funkcijos grafikas turi liestinę tame taške, o grafiko liestinės posvyris yra $f'(a)$.
- Parašome liestinės lygtį
  $$y = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{6.2}$$

Kartais riba (6.1) pakeičiama kita, kuri labai dažnai turi paprastesnę išraišką.
Pakeičiami kintamieji $x - a = h, x = a + h, x \to a \Leftrightarrow h \to 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a). \tag{6.3}$$

6.2. Pavyzdys. Funkcija $f(x) = x^n$. Tada

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} h^k$$

$$= a^n + na^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}h^2 + \ldots + h^n. \tag{6.4}$$

$$\frac{(a+h)^n - a^n}{h} = na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}. \tag{6.5}$$

Matome, kad (6.5) lygybės dešinėje pusėje visi nariai, išskyrus pirmąjį yra h laipsniai. Jų visų ribos lygios nuliui, kai $h \to 0$. Todėl

$$\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = na^{n-1} = f'(a), f(x) = a^n. \tag{6.6}$$

Čia iškyla žymėjimo kolizija. Mes skaitome “ $f'(a)$ - funkcijos f išvestinė taške a”.

Jei a fiksuojame, tai negalime rašyti $(a^n)' = na^{n-1}$, nes tada a^n yra konstanta ir jos

išvestinė nulis. Galima žymėti taip $(x^n)'\big|_{x=a} = na^{n-1}$. Dabar galime parašyti liestinės lygtį

$$y = a^n + na^{n-1}(x-a)\,. \tag{6.7}$$
Jei atidžiai pažiūrėsime į lygybės (6.4) dešiniąją pusę, prisiminsime, kad $h = x - a$, tai pastebėsime, kad jos pirmieji du nariai sutampa su liestinės lygties (6.7) dešiniąja puse. Tie pirmieji du nariai vadinami tiesine funkcijos dalimi. Ko reikia, kad jie ir nusakytų liestinę? Pažymėkime
$$r(h) = \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}h^2 + \ldots + h^n. \tag{6.8}$$
Raide r žymime nuo angliško žodžio "rest" – liekana. Tada

$$\frac{(a+h)^n - a^n}{h} = na^{n-1} + \frac{r(h)}{h}\,. \tag{6.9}$$
Kad egzistuotų (6.9) lygybės kairiosios pusės riba, kai $h \to 0$, reikia, jog
$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = 0\,. \tag{6.10}$$
Kad galiotų sąlyga (6.10), pakanka turėti (gauti) tokį įvertį
$$|r(h)| \le C|h|^2\,, |h| \le \delta\,, \tag{6.11}$$
čia C ir δ – kokie nors teigiami skaičiai, t.y. nelygybė (6.11) galioja kokioje nors taško $h = 0$ aplinkoje. Tokį įvertį gauti visai nesunku
$$\begin{aligned}
|r(h)| &= \left|\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}h^2 + \ldots + h^n\right| \\
&\le \frac{n(n-1)}{2}|a|^{n-2}|h|^2 + \ldots + |h|^n \\
&= |h|^2\left(\frac{n(n-1)}{2}|a|^{n-2} + \ldots + |h|^{n-2}\right) && \text{(iškeliame } |h|^2\text{)} \\
&\le |h|^2\left(\frac{n(n-1)}{2}|a|^{n-2} + \ldots + 1\right) && \text{(kai } |h| \le 1\text{)} \\
&\le |h|^2\left(|a|^n + n|a|^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}|a|^{n-2} + \ldots + 1\right) && \text{(pridedame du narius)} \\
&= |h|^2\left(|a|+1\right)^n\,. && \text{(binomo formulė)}
\end{aligned} \tag{6.12}$$
Koks visų šių išvedžiojimų moralas? Tai apibendrinsime ir suformuluosime kaip teoremą.

6.3. Teorema. Jei egzistuoja tokios konstantos A ir C, kad
$$f(x) = f(a+h) = f(a) + A\cdot h + r(h)\,, \tag{6.13}$$
o $r(h)$ tenkina sąlygą (6.11), tai funkcija f turi išvestinę taške a ir $f'(a) = A$.
Įrodymas. Perkėlę du narius iš lygybės (6.13) dešiniosios pusės į kairiąją, padalinę iš h ir pasinaudoję nelygybe (6.11), gauname
$$\left|\frac{f(a+h) - f(h)}{h} - A\right| = \left|\frac{r(h)}{h}\right| \le \frac{C|h|^2}{|h|} = C|h| < \varepsilon\,. \tag{6.14}$$
Pačią paskutinę (6.14) nelygybę spręsti mokame.Iš to išplaukia, kad
$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(a+h) - f(h)}{h} - A\right| = 0\,,$$
bet tai ekvivalentu, kad

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(h)}{h} = A .$$

6.4. Pavyzdys. Rodiklinės funkcijos $y = \exp(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$, išvestinė. Kadangi rodiklinė funkcija buvo apibrėžta kaip riba, tai įstatę tą apibrėžimą į išvestinės apibrėžimą (6.3), nelabai žinotume, ką daryti

$$\lim_{x \to a} \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n}{x - a} .$$

Iš pradžių nagrinėsime rodiklinę funkciją nulio taško aplinkoje. Išskleiskime funkciją $x_n(h) = \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n$ pagal binomo formulę

$$x_n(h) = \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n = 1 + h + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{h}{n}\right)^n . \qquad (6.15)$$

Pastarosios nelygybės dešiniojoje pusėje pirmieji du nariai sudaro tiesinę dalį. Perkelkime juos į kairiąją pusę ir likutį įvertinkime:

$$x_n(h) - 1 - h = r_n(h) = \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{h}{n}\right)^n$$

$$\begin{aligned}
|r_n(h)| &= \left| \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{h}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{h}{n}\right)^n \right| \\
&\le \frac{n(n-1)}{2}\frac{|h|^2}{n^2} + \ldots + \frac{|h|^n}{n^n} \\
&= |h|^2 \left(\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{|h|^{n-2}}{n^n} \right) \\
&\le |h|^2 \left(\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^n} \right) \\
&\le |h|^2 \left(1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^n} \right) \\
&= |h|^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\
&\le |h|^2 e .
\end{aligned} \qquad (6.16)$$

Tai jau ne kartą matyta! Iš šio įverčio, gauname

$$|x_n(h) - 1 - h| = |r_n(h)| \le e|h|^2 . \qquad (6.17)$$

Pereikime prie ribos šioje nelygybėje, kai $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n(h) - 1 - h| \le e|h|^2 ,$$

$$\left|\lim_{n\to\infty} x_n(h) - 1 - h\right| \le e|h|^2 ,$$

$$|\exp(h) - 1 - h| \le e|h|^2 . \qquad (6.18)$$

Teorema 6.3 teigia, kad iš nelygybės (6.18) išplaukia, jog rodiklinė funkcija taške $x = 0$ turi išvestinę ir $\exp'(0) = (e^x)'\big|_{x=0} = 1$. Dabar apskaičiuosime rodiklinės funkcijos išvestinę bet kokiame taške.

$$
\begin{aligned}
\exp'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{\exp(a+h)-\exp(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\exp(a)(\exp(h)-1)}{h} \\
&= \exp(a)\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(a)
\end{aligned}
$$

t.y.

$$\exp'(x)=\exp(x) \text{ arba } \left(e^x\right)'=e^x,\ \forall x, x\in\mathbb{R}. \tag{6.19}$$

6.5. Pastabos. Kad galiotų teoremos (6.3) tvirtinimas, sąlyga (6.11) nėra būtina, pakanka ir sąlygos (6.10). Jei tartume, kad funkcija taške a turi išvestinę ir pažymėtume

$$r(h)=f(a+h)-f(a)-f'(a)h,$$

tai akivaizdu, kad

$$\exists\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0.$$

Jei funkcija $r(h)$ tenkina sąlygas (6.10) ar (6.11), tai tokioms funkcijoms yra sugalvoti specialūs žymėjimai:

- jei $\lim\limits_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0$, tai $r(h)=o(h), h\to 0$, (6.20)
- jei $\exists C, C>0, \delta, \delta>0, |r(h)|\le C|h|^2, |h|\le\delta$, tai $r(h)=O(h^2), h\to 0$. (6.21)

Sąlyga (6.21) yra stipresnė už sąlygą (6.20). Tai matyti iš paskutiniųjų (6.14) nelygybių. Bet ne atvirkščiai. Pvz., $r(h)=h^{\frac{3}{2}}$. Tada $\frac{r(h)}{h}=h^{\frac{1}{2}}\to 0$, kai $h\to 0$, bet funkcija $r(h)$ sąlygos (6.21) netenkina.

Mes laikysime, kad pasakymai "funkcija turi išvestinę taške (arba aibėje)" ir "funkcija yra diferencijuojama taške (arba aibėje)" yra ekvivalenčios. Kai kurie autoriai skiria šias sąvokas ir sako:

- funkcija turi išvestinę taške a, jei
$$\exists\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a); \tag{6.22}$$
- funkcija diferencijuojama taške a, jei egzistuoja konstanta A, kad
$$f(a+h)=f(a)+A\cdot h+o(h), h\to 0. \tag{6.23}$$

Mes įsitikinome, kad, iš tikrųjų, abi sąlygos yra ekvivalenčios ir tada $A=f'(a)$.

6.6. Tolydumo ir diferencijuojamumo ryšys. Jei funkcija diferencijuojama taške, tai ji ir tolydi tame taške taške, bet ne atvirkščiai.

Kontrapavyzdys. Funkcija $f(x)=|x|$. Ji yra tolydi visur, bet nediferencijuojama taške $x=0$.

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{|x|-|0|}{x}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{x}{x}=1,$$
$$\lim_{x\uparrow 0}\frac{|x|-|0|}{x}=\lim_{x\uparrow 0}\frac{-x}{x}=-1.$$

Iš čia išplaukia, kad neegzistuoja $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x}$, t.y. neegzistuoja funkcijos išvestinė taške $x=0$.
Sakykime, funkcija diferencijuojama taške *a*, t.y. galioja sąlyga (6.23). Tada paėmę $\varepsilon=1$, gauname, kad egzistuoja toks $\delta, \delta>0$, kad

$$\frac{|o(h)|}{|h|}\le 1, |h|<\delta, \text{ arba } |o(h)|\le |h|$$

$$|f(a+h)-f(a)|=|Ah+o(h)|\le |A||h|+|h|=(|A|+1)|h|. \tag{6.24}$$

Iš pastarojo įverčio išplaukia funkcijos tolydumas taške *a*.

6.7. Teorema (Aritmetinės išvestinių savybės). Jei funkcios *f* ir *g* turi išvestines taške *a*, $c\in\mathbb{R}$, tai funkcijos *cf*, $f\pm g$, $fg, \frac{f}{g}$ turi išvestines taške *a* ir

- $(cf)'(a)=c\cdot f'(a)$,
- $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$,
- $(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, jei $g(a)\ne 0$.

Įrodymas. Pirmosios dvi lygybės yra tiesioginės atitinkamų funkcijų ribų savybės. Įrodykime trečiąją lygybę.

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(a)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a+h)+\lim_{h\to 0}f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\
&=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a).\end{aligned}$$

Paskutinioje lygybėje reikėjo pasinaudoti funkcijos *g* tolydumu taške *a*. Panašiai įrodoma ir funkcijų santykio išvestinės formulė.

6.8. Trigonometrinių funkcijų išvestinės.

$$\begin{aligned}(\sin x)'&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h} && \text{(sinusų skirtumo formulė)}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\frac{2x+h}{2} && \text{(naudojamės riba } \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\text{)}\\
&=\cos x. && \text{(naudojamės kosinuso tolydumu)}\end{aligned} \tag{6.25}$$

Analogiškai gautume

$$(\cos x)'=-\sin x. \tag{6.26}$$

Tangento ir kotangento išvestines galima apskaičiuoti pagal funkcijų santykio išvestinių formules:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{6.27}$$

ir analogiškai

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{6.28}$$

6.9. Teorema (sudėtinės funkcijos išvestinė). Jei funkcija $y = f(x)$ yra diferencijuojama taške *a*, $b = f(a)$, funkcija $z = g(y)$ yra diferencijuojama taške *b*, tai sudėtinė funkcija $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ yra diferencijuojama taške *a* ir

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a). \tag{6.29}$$

Įrodymas. Galime parašyti paprastą lygybę

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a}. \tag{6.30}$$

Jei šioje lygybėje pakeisime $f(x) = y,\ f(a) = b$, pereisime prie ribos, kai $x \to a$, tai $y \to b$ (diferencijuojama taške *a* funkcija *f* yra tolydi tame taške). Tada

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a}\\ &= \lim_{y\to b}\frac{g(y) - g(b)}{y-b} \cdot \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\\ &= g'(b) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).\end{aligned}$$

Gavome tai, ko reikėjo. Tik reikia įsitikinti, kad vardiklis lygybėje (6.30) nelygus nuliui. Jei $f'(a) \neq 0$, tai egzistuoja tokia taško *a* aplinka *V*, kad

$$x \in V \Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right| \geq \frac{|f'(a)|}{2},$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| \geq \frac{|f'(a)|}{2}|x-a| \neq 0, \text{ kai } x \neq a.$$

Jei $f'(a) = 0$, tai tiesiogiai įrodysime, kad $(f \circ g)'(a) = 0$. Tada abi lygybės (6.29) pusės bus lygios nuliui. Funkcijai *g* parašykime nelygybę (6.24), kuri galioja tam tikroje taško *b* aplinkoje:

$$|g(y) - g(b)| \leq (|g'(b)| + 1)|y-b|. \tag{6.31}$$

Įstatykime į šią nelygybę $y = f(x), b = f(a)$, padalinkime iš $x-a$ ir pereikime prie ribos, kai $x \to a$.

$$|g(f(x)) - g(f(a))| \leq (|g'(b)| + 1)|f(x) - f(a)|,$$

$$\left|\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a}\right| \leq (|g'(b)| + 1)\left|\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right|,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\left|\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a}\right| &\leq (|g'(b)| + 1)\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right|.\\ &\leq (|g'(b)| + 1)|f'(a)| = 0.\end{aligned}$$

Matome, kad įrodymas išėjo nevisai trumpas. Buvo galima įrodyti neskiriant į atvejus, bet tada būtų reikėję naudotis apibrėžimu (6.23).