2.5. KLASIKINĖS TOLYDŽIŲ FUNKCIJŲ TEOREMOS

5.1. Pirmoji Bolcano – Koši teorema. Jei funkcija *f* tolydi intervale [*a*;*b*], intervalo galuose įgyja priešingų ženklų reikšmes, tai egzistuoja toks taškas $c, c \in (a;b)$, kuriame $f(c) = 0$.
Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, 1781-1848,
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Bolzano.html,
Augustin Louis Cauchy, 1789-1857,
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Cauchy.html.
Kontrapavyzdys. Tolydumo sąlyga yra esminė. Funkcija

$$f(x) = \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}, x \in [0; \frac{3}{2}], \tag{5.1}$$

nėra tolydi taške $x = 1$. Nors $f(0) = -\frac{1}{2}, f(1) = \frac{1}{2}$, bet funkcija jokiame taške nelygi nuliui.
Įrodymas. Jei nubrėšime grafiką tolydžios funkcijos, intervalo galuose įgyjančios priešingų ženklų reikšmes, tai teoremos tvirtinimas pasidaro labai suprantamas.
Sakykime, $f(a) < 0, f(b) > 0$. Pažymėkime intervalą $[a;b] = [a_0;b_0]$. Paimkime intervalo $[a;b]$ vidurio tašką $\frac{a+b}{2}$, apskaičiuokime funkcijos reikšmę tame taške.
Galimi trys atvejai:

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$. Tada $c = \frac{a+b}{2}$.
- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$. Tada apibrėžiame $[a_1;b_1] = \left[\frac{a+b}{2}; b_0\right]$.
- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$. Tada apibrėžiame $[a_1;b_1] = \left[a_0; \frac{a+b}{2}\right]$.

Taip tęsdami procesą gausime intervalų seką $[a_n;b_n]$, tenkinančią sąlygas

- $[a_{n+1};b_{n+1}] \subset [a_n;b_n], b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$;
- $f(a_n) < 0$; (5.2)
- $f(b_n) > 0$. (5.3)

Turime susitraukiančiųjų intervalų lemos prielaidą. Todėl egzistuoja $c, c \in [a_n;b_n], \forall n$. Be to, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ ir $c \in [a;b]$. Nelygybėse (5.2) ir (5.3) pereikime prie ribos. Iš funkcijos tolydumo išplaukia

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0,$$
$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0.$$

Abi šios nelygybės reiškia, kad $f(c) = 0$.

5.2. Išvada (Bolcano – Koši teorema apie tarpinę reikšmę). Jei funkcija *f* yra tolydi inervale [*a*; *b*], *f*(*a*) < *f*(*b*) ir $C, f(a) < C < f(b)$, tai egzistuoja toks $c, c \in (a;b)$, kad $f(c) = C$.

Įrodymas. Tai labai paprasta. Nauja funkcija $g(x) = f(x) - C$ tenkins pirmosios Bolcano – Koši teoremos sąlygas. Todėl egzistuos toks taškas $c, c \in (a;b), g(c) = 0$. Tai ekvivalentu, kad $f(c) = C$.

5.3. Išvada. Jei funkcija *f* yra tolydi intervale *I*, tai $f(I) = \{f(x), x \in I\}$ yra intervalas.
Įrodymas. Iš pradžių reikėtų gero intervalo apibrėžimo. Mes suprantame, kad aibės $[0;1], [a;b], (a;b), [a;b), (-\infty;1], (-\infty;+\infty)$ ir dar kitokios yra intervalai. Taip pat suprantame, kad aibė $A = [0;1] \cup \{3\}$ nėra intervalas. Kokios savybės nusakytų intervalą? Ką reiškia "*inter*"? Gal "*tarp*"? Tai jau raktas apibrėžimui.
Aibę $I, I \subset \mathbb{R}$, vadinsime intervalu, jei su bet kokiais dviem taškais x_1, x_2 iš aibės *I* bet koks tarpinis taškas $x, x_1 < x < x_2$, taip pat priklauso aibei *I*.
Paimkime bet kokius du taškus $y_1, y_2 \in f(I), y_1 < y_2$. Tada egzistuos tokie du skirtingi taškai $x_1, x_2 \in I$, kad $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Sakykime, kad $x_1 < x_2$. Taikome išvadą 5.2. Paimkime bet kokį tašką $y_0, y_1 < y_0 < y_2$. Egzistuos toks taškas $x_0, x_1 < x_0 < x_2$, kad $f(x_0) = y_0$. Vadinasi, $y_0 \in f(I)$ ir $f(I)$ - intervalas.

5.4. Teorema apie atvirkštinės funkcijos tolydumą. Jei funkcija *f* intervale *I* yra griežtai didėjanti (ar mažėjanti) ir tolydi, tai intervale $f(I)$ egzistuoja atvirkštinė funkcija ir ji tolydi.
Įrodymas. Iš išvados 5.3 gauname, kad aibė $f(I)$ yra intervalas. Taigi kiekvienam $y, y \in f(I), \exists x, x \in I, f(x) = y$. Toks *x* gali atsirasti tik vienas. Jei būtų du $x_1, f(x_1) = y, x_2, f(x_2) = y, x_1 < x_2$, tai dėl funkcijos griežto didėjimo (ar mažėjimo) gautume prieštarą. Toks priskyrimas $y \in f(I), y \to x, x \in I$, kad $f(x) = y$, vadinamas atvirkštine funkcija ir žymimas $f^{-1} : f(I) \to I$, $x = f^{-1}(y)$. Abi funkcijos susijusios akivaizdžiais sąryšiais

$$\forall x, x \in I, f^{-1}(f(x)) = x, \qquad (5.4)$$

$$\forall y, y \in f(I), f\left(f^{-1}(y)\right) = y. \qquad (5.5)$$

Įrodysime atvirkštinės funkcijos tolydumą. Paimkime bet kokį y_0 iš aibės $f(I)$ vidaus ir pažymėkime $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Paimkime bet kokį $\varepsilon, \varepsilon > 0, x_0 - \varepsilon \in I, x_0 + \varepsilon \in I$, taigi fiksuokime taško x_0 aplinką $U = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$. Pažymėkime $y_1 = f(x_0 - \varepsilon), y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Dėl funkcijos griežto didėjimo gauname $y_1 < y_0 < y_2$. Gavome taško y_0 aplinką $V = (y_1; y_2)$. Akivaizdu, kad

$$y \in V \Leftrightarrow y_1 < y < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y) = x \in U. \qquad (5.6)$$

Bet tai reiškia funkcijos f^{-1} tolydumą taške y_0.

5.5. Vejerštraso pirmoji teorema. Tolydi funkcija intervale $[a;b]$ yra aprėžta.
Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815-1897,
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Weierstrass.html.
Kontrapavyzdys. Intervalo uždarumas yra svarbi sąlyga. Nagrinėkime funkciją $y = \frac{1}{x}, x \in (0;1]$. Ji yra tolydi, bet nėra aprėžta.
Įrodymas. Sakykime, funkcija nėra aprėžta. Tada

$$\forall M, \exists x, x \in [a;b], |f(x)| > M . \quad (5.7)$$

Vietoje vieno *M* paimkime seką $\{M_n\}, \lim\limits_{n\to\infty} M_n = +\infty$ (paprasčiausias atvejis $M_n = n$).
Remdamiesi sąlyga (5.7), galime surasti seką $\{x_n\}, x_n \in [a;b]$,

$$|f(x_n)| > M_n, \forall n . \quad (5.8)$$

Seka $\{x_n\}$ yra aprėžta, todėl ji turi konverguojantį posekį (pagal Vejerštraso teoremą), sakykime $\{x_{n_k}\}, \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c, c \in [a;b]$. Iš funkcijos *f* tolydumo išplaukia, kad seka $\{f(x_{n_k})\}$ konverguoja į $f(c)$, todėl ji turi būti aprėžta. Antra vertus, iš sąlygos (5.8) išplaukia, kad

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| \geq \lim_{k\to\infty} M_{n_k} = +\infty ,$$

t.y. seka $\{f(x_{n_k})\}$ neapžrėžta. Gauta prieštara įrodo, kad prielaida (5.7) apie funkcjos neaprėžtumą yra neteisinga.

5.6. Antroji Vejerštraso teorema. Tolydi funkcija uždarame intervale įgyja savo didžiausią ir mažiausią reikšmę.
Įrodymas. Sakykime, turime tolydžią funkciją *f* intervale $[a;b]$. Ji yra aprėžta (Vejerštraso teorema 5.5). Tada funkcijos reikšmių aibė $\{f(x); x \in [a;b]\}$ yra aprėžta ir egzistuoja $M = \sup\{f(x); x \in [a;b]\}$. Paėmę bet kokį $\varepsilon, \varepsilon > 0$, galėsime rasti tokį $x, x \in [a;b]$, kad

$$M - \varepsilon < f(x) \leq M , \quad (5.9)$$

nes skaičius $M - \varepsilon$ jau nebebus funkcijos reikšmių aibės viršutiniu rėžiu. Paimkime seką $\{\varepsilon_n\}, \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, pvz.: $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Tada galėsime rasti seką $\{x_n\}, x_n \in [a;b]$, kad

$$M - \varepsilon_n < f(x_n) \leq M, \forall n . \quad (5.10)$$

Įrodymo pabaiga panaši kaip ir ankstesnėje teoremoje. Seka $\{x_n\}$ yra aprėžta, todėl ji turi konverguojantį posekį (pagal Vejerštraso teoremą), sakykime $\{x_{n_k}\}, \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c_M, c_M \in [a;b]$. Dėl funkcijos *f* tolydumo

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c_M) . \quad (5.11)$$

Įstatę posekį į nelygybes (5.10)

$$M - \varepsilon_{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$$

ir pasinaudoję dviejų policininkų principu, gausime

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M . \quad (5.12)$$

Sulyginę (5.11) ir (5.12), gauname teoremos tvirtinimą, kad funkcija įgyja savo didžiausią reikšmę, t.y. egzistuoja toks $c_M, c_M \in [a;b]$, kad

$$f(c_M) = M = \sup\{f(x); x \in [a;b]\} . \quad (5.13)$$

Analogiškai įrodoma, kad funkcija įgyja savo mažiausiąją reikšmę.
Kontrapavyzdžiai. Funkcijos tolydumas bei intervalo uždarumas yra esminės teoremos sąlygos. Panagrinėkime funkciją

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor \text{ intervale } [0;1) \text{ arba } [0;1] .$$

Akivaizdu, kad $\sup\{f(x), x \in [0;1)\} = \sup\{f(x), x \in [0;1]\} = 1$, bet funkcija niekada nelygi vienetui nei pirmajame, nei antrajame intervale.

Pastaba. Pastaroji teorema yra tipiška egzistencijos teorema. Nei jos formuluotė, nei įrodymas nieko nesako, kaip surasti tą argumento reikšmę, kurioje funkcija įgyja didžiausią reikšmę. Pirmosios Bolcano – Koši teoremos įrodymas be egzistencijos duoda ir metodą, kaip surasti lygties $f(x)=0$ šaknį.

5.7. Finansų matematika. Nagrinėkime diskretų pinigų srautą $C=(c_0,c_1,...,c_n)$. Čia c_k - suprantane kaip mokėjimą laiko momentu $k, k=0,1,...,n$. Tokiu srautu galima aprašyti investicinį projektą. Tada pirmieji $c_0,c_1,...,c_k$ mokėjimai gali būti neigiami (investicijos), o likusieji $c_{k+1},...,c_n$ - teigiami (grąža, pelnas). Jei i – laikysime palūkanų norma, tai galime apskaičiuoti šio srauto dabartinę vertę

$$P=c_0+\frac{c_1}{1+i}+\frac{c_2}{(1+i)^2}+...+\frac{c_n}{(1+i)^n}. \tag{5.14}$$

Daugiklis

$$v=\frac{1}{1+i} \tag{5.15}$$

vadinamas diskonto daugikliu. Lygties

$$c_0+\frac{c_1}{1+i}+\frac{c_2}{(1+i)^2}+...+\frac{c_n}{(1+i)^n}=0 \tag{5.16}$$

arba

$$c_0+c_1v+c_2v^2+...+c_nv^n=0 \tag{5.17}$$

sprendinys i_0 vadinamas pinigų srauto *vidinės grąžos norma* (*internal rate of return*) arba *pelningumo norma* (*yield rate*). Vienokio ar kitokio termino vartojimas priklauso nuo finansinio konteksto, tačiau matematinė jų abiejų prasmė yra ta pati. Išsprendę (5.16) arba (5.17) lygtį ir suradę i_0, lyginame jį su palūkanų norma, esančia realiajame pasaulyje, ir sprendžiame apie investicinio projekto prasmingumą, arba lyginame jį su kitu projektu (jo vidinės grąžos norma) ir sprendžiame, kuris iš jų yra naudingesnis.

Pavyzdys. Suraskime pinigų srauto $(-5,0,1,2,3)$ vidinės grąžos normą. Apibrėžkime funkciją

$$P(v)=-5+v^2+2v^3+3v^4. \tag{5.18}$$

Funkcija P yra tolydi (polinomas), $P(0)=-5, P(1)=1$. Pirmoji Bolcano – Koši teorema teigia, kad lygtis

$$P(v)=-5+v^2+2v^3+3v^4=0 \tag{5.19}$$

intervale $(0;1)$ turi sprendinį. Ar vienintelį?

$$P'(v)=2v+6v^2+12v^3>0, \text{ kai } v>0.$$

Vadinasi, funkcija P yra griežtai didėjanti, kai $v>0$. Todėl intervale $(0;1)$ lygtis (5.19) turės tik vieną šaknį. Ją galima rasti Bolcano – Koši intervalo dalijimo pusiau metodu, kuris naudojamas teoremos įrodyme. Šį metodą nesunku realizuoti Microsoft Excel skaičiuokle. Skaičiavimai pateikti lentelėje.

$$a_0=0, b_0=1, c_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n),$$

$$a_n=\text{if}(P(c_{n-1})>0, a_{n-1}, c_{n-1}), n=1,2,..., \tag{5.20}$$

$$b_n=\text{if}(P(c_{n-1})>0, c_{n-1}, b_{n-1}), n=1,2,.... \tag{5.21}$$

Funkcija if įgyja antrąją reikšmę, jei pirmoji loginė sąlyga yra teisinga, ir trečiąją reikšmę priešingu atveju. Lentelėje stulpelių su reikšmėmis $P(a_n), P(b_n)$ galėtų ir nebūti, bet jie suteikia saugumo jausmą, kad skaičiavimai vyksta teisingai.

n	a_n	b_n	c_n	$P(a_n)$	$P(b_n)$	$P(c_n)$
0	0.0000	1.0000	0.5000	-5.0000	1.0000	-4.3125
1	0.5000	1.0000	0.7500	-4.3125	1.0000	-2.6445
2	0.7500	1.0000	0.8750	-2.6445	1.0000	-1.1360
3	0.8750	1.0000	0.9375	-1.1360	1.0000	-0.1557
4	0.9375	1.0000	0.9688	-0.1557	1.0000	0.3990
5	0.9375	0.9688	0.9531	-0.1557	0.3990	0.1160
6	0.9375	0.9531	0.9453	-0.1557	0.1160	-0.0212
7	0.9453	0.9531	0.9492	-0.0212	0.1160	0.0470
8	0.9453	0.9492	0.9473	-0.0212	0.0470	0.0128
9	0.9453	0.9473	0.9463	-0.0212	0.0128	-0.0042
10	0.9463	0.9473	0.9468	-0.0042	0.0128	0.0043
11	0.9463	0.9468	0.9465	-0.0042	0.0043	0.0000
12	0.9463	0.9465	0.9464	-0.0042	0.0000	-0.0021
13	0.9464	0.9465	0.9465	-0.0021	0.0000	-0.0010

Taigi galime laikyti, kad $v_0 = 0.946$. Tada iš lygybės (5.15) apskaičiuojame

$$i_0 = \frac{1-v_0}{v_0} = \frac{1-0.946}{0.946} = \frac{0.054}{0.946} = 0.057$$

arba $i_0 = 5.7\%$. Tai, tikriausiai, labai nedidelė vidinė grąžos norma.