2.4. EKSPONENTINĖ (RODIKLINĖ) FUNKCIJA

4.1. Klasikinis apibrėžimas. Eksponentinės (rodiklinės) funkcijos $y = a^x, a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ apibrėžimas yra gana subtilus. Funkciją skaitome taip - *a* laipsniu *x*. Kai argumentas *x* yra natūralusis, atvirkštinis natūraliajam, teigiamas ar neigiamas trupmeninis (racionalusis) skaičius, tai mes suprantame, ką reiškia a^x. Elementariojoje (mokyklinėje) matematikoje įrodomos pagrindinės rodiklinės funkcijos savybės racionaliajam argumentui

$$
\begin{aligned}
&a^r \cdot a^q = a^{r+q},\\
&\left(a^r\right)^q = a^{rq}, \qquad\qquad (4.1)\\
&a^{-r} = \frac{1}{a^r}, r, q \in \mathbb{Q},
\end{aligned}
$$

Pratęsti funkciją bet kokiam realiajam skaičiui galima taip. Paimkime bet kokį realųjį skaičių *x*. Suraskime racionaliųjų skaičių seką $\{r_n\}, \lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. Apibrėžkime

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}. \qquad (4.2)$$

Kyla keletas natūralių klausimų:

- Ar seka $\left\{a^{r_n}\right\}$ konverguoja?
- Jei paimsime kitą seką $\{r_n'\}, \lim\limits_{n\to\infty} r_n' = x$, tai ar $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n'}$?

Tai nėra visiškai paprasti klausimai, bet išsprendžiami. Panagrinėkime apibrėžimą (4.2) skaičiavimo prasme. Sakykime, $r_n = \dfrac{315}{4126}$. Tada $a^{r_n} = a^{\frac{315}{4126}} = \left(a^{\frac{1}{4126}}\right)^{315}$.

Pradžiai reikėtų surasti 4126 laipsnio šaknį, po to pakelti 315 laipsniu. Tai būtų tik vienas sekos $\left\{a^{r_n}\right\}$ narys. Procedūra nedžiuginanti.

4.2. Pamąstymai. Matematinė analizė yra galingas mokslas. Mes per pirmuosius keletą mėnesių susipažinome su kai kuriais matematinės analizės metodais. Prisiminkime, ką jau esame įrodę.

- Seka $x_n = \left(1 + \dfrac{i}{n}\right)^n, i > 0,$ didėjanti.
- Seka $y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{i^k}{k!}$ yra didesnė už x_n, t.y. $x_n \le y_n, \forall n$.
- Seka $\{y_n\}$ aprėžta, kai $0 \le i < 2$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{i^k}{k!} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{i}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
- Kai $i = 1$, tai apibrėžėme skaičių $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
- Jei *i* – racionalus, t.y. $i = \dfrac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$, tai $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{i}{n}\right)^n = e^i = e^{\frac{p}{q}}$.

Pastarasis sąryšis labai įdomus ir svarbus. Seka $\{x_n\}$ apibrėžta visiems realiesiems *i*. Ji didėjanti, kai $i > 0$, ir aprėžta, kai $i < 2$. Vadinasi, konverguoja. Kai *i* – racionalusis, tai sekos riba yra skaičiaus *e* laipsnis. Gal galima apibrėžti

$$e^u = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n, u\in\mathbb{R}\,? \qquad (4.3)$$

Laikinai atsiribosime nuo finansinės interpretacijos, todėl argumentą *i* pakeisime kitu.

Pažymėkime seką $x_n(u)=\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n$, o ribinę funkciją $f(u)$, t.y. apibrėžkime

$$f(u)=\lim_{n\to\infty}x_n(u)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n, u\in\mathbb{R}\,. \qquad (4.4)$$

Įrodysime šios funkcijos egzistenciją ir tirsime jos savybes. Akivaizdu

$$f(0)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}1^n=\lim_{n\to\infty}1=1\,. \qquad (4.5)$$

Taip pat jau įrodyta

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\,. \qquad (4.6)$$

4.3. Sekos $\{y_n\}$ aprėžtumas. Pažymėkime

$$y_n(u)=\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!} \qquad (4.7)$$

ir nagrinėkime šią seką, kai $0\le u\le M, M\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
y_n(u)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}=\sum_{k=0}^{M}\frac{u^k}{k!}+\sum_{k=M+1}^{M+p}\frac{u^k}{k!} && (n=M+p)\\
&\le\sum_{k=0}^{M}\frac{M^k}{k!}+\sum_{k=M+1}^{M+p}\frac{M^k}{k!} && (k=M+l, l=1,...,p)\\
&\le\sum_{k=0}^{M}\frac{M^k}{k!}+\frac{M^M}{M!}\sum_{l=1}^{p}\frac{M^l}{(M+1)^l} && (k>M\Rightarrow\frac{1}{k}\le\frac{1}{M+1})\\
&=\sum_{k=0}^{M}\frac{M^k}{k!}+\frac{M^M}{M!}\frac{\frac{M}{M+1}\left(1-\left(\frac{M}{M+1}\right)^p\right)}{1-\frac{M}{M+1}} && \text{(geometrinės progresijos suma)}\\
&\le\sum_{k=0}^{M}\frac{M^k}{k!}+\frac{M^M}{M!}\frac{\frac{M}{M+1}}{\frac{M+1-M}{M+1}} && (1\text{-}\left(\frac{M}{M+1}\right)^p<1,\ \forall p, p\in\mathbb{N})\\
&=\sum_{k=0}^{M}\frac{M^k}{k!}+\frac{M^M}{M!}M=C(M). && \text{(taip apibrėžiame C(M))} \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Kai $M=2$, tai toks įvertinimas buvo atliktas skyrelyje (1.4). Matome, kad aprėžimo konstanta C(M) priklauso nuo ilgio intervalo $[0;M]$, kuriame nagrinėjame seką. Kadangi abi sekos $\{x_n(u)\}$ ir $\{y_n(u)\}$ didėjančios ir aprėžtos bet kokiame intervale $[0;M]$, tai jos konverguoja (be to, jų ribos yra lygios!).

4.4. Pagrindinė rodiklinės funkcijos savybė.

$$f(u+v)=f(u)f(v), u,v\in\mathbb{R}\,. \qquad (4.9)$$

Iš pradžių nagrinėsime teigiamus argumentus *u* ir *v*. Reikia įvertinti skirtumą

$$
\begin{aligned}
&\left|x_n(u)x_n(v)-x_n(u+v)\right| = \\
&\quad = \left|\left(1+\frac{u}{n}\right)^n\left(1+\frac{v}{n}\right)^n-\left(1+\frac{u+v}{n}\right)^n\right| && \text{(apibrėžimai)} \\
&\quad = \left|\left(\left(1+\frac{u}{n}\right)\left(1+\frac{v}{n}\right)\right)^n-\left(1+\frac{u+v}{n}\right)^n\right| && \text{(laipsnių sandauga)} \\
&\quad = \left|\left(1+\frac{u+v}{n}+\frac{uv}{n^2}\right)^n-\left(1+\frac{u+v}{n}\right)^n\right| && \text{(aritmetika - daugyba)} \\
&\quad = \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{u+v}{n}\right)^{n-k}\left(\frac{uv}{n^2}\right)^k-\left(1+\frac{u+v}{n}\right)^n\right| && \text{(binomo formulė)} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{u+v}{n}\right)^{n-k}\left(\frac{uv}{n^2}\right)^k && \text{(prastinimas, kai } k=0\text{)} \\
&\quad = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{u+v}{n}\right)^{n-k}\left(\frac{uv}{n}\right)^k\frac{1}{n^{k-1}} && \text{(triukas !!!)} \\
&\quad \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{u+v}{n}\right)^{n-k}\left(\frac{uv}{n}\right)^k && \left(\frac{1}{n^{k-1}}\le 1, k\ge 1\right) \\
&\quad \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\frac{u+v}{n}\right)^{n-k}\left(\frac{uv}{n}\right)^k && \text{(pridedame narį su } k=0\text{)} \\
&\quad = \frac{1}{n}\left(1+\frac{u+v}{n}+\frac{uv}{n}\right)^n && \text{(binomo formulė)} \\
&\quad = \frac{1}{n}x_n(u+v+uv) && \text{(apibrėžimas)} \\
&\quad \le \frac{1}{n}y_n(u+v+uv) && \text{(žinoma nelygybė)} \\
&\quad \le \frac{1}{n}C(M_1), && \text{((4.8) įvertis)} \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

kai $0\le u\le M, 0\le v\le M, M_1=2M+M^2$. Kaip matome, šioje didžiulėje nelygybėje modulio ženklo nereikia, nes po juo esantis reiškinys yra teigiamas. Galime pereiti prie ribos

$$
0\le \lim_{n\to\infty}x_n(u)\lim_{n\to\infty}x_n(v)-\lim_{n\to\infty}x_n(u+v)\le C(M_1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n},
$$
$$
0\le f(u)f(v)-f(u+v)\le 0.
$$

Tai reiškia, kad teisinga (4.9) su teigiamais argumentais. Panagrinėkime funkciją, kai argumentas neigiamas. Tada patogiau rašyti

$$
f(-u)=\lim_{x\to\infty}x_n(-u)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{u}{n}\right)^n, u>0. \tag{4.11}
$$

Seka $\{x_n(-u)\}$ nebeturi monotoniškumo savybės. Net nežinome, ar seka konverguoja. Reikia suktis kitaip. Parašykime akivaizdžią lygybę

$$\left(1-\frac{u}{n}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{u}{n}\right)^n\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n} = \frac{\left(1-\frac{u^2}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}. \tag{4.12}$$

Seka, esanti (4.12) lygybės vardiklyje, konverguoja. Įrodysime, kad sekos, esančios skaitiklyje, riba yra vienetas. Analogiškai samprotaudami kaip ir nelygybės (4.10) įrodyme, įvertinsime skirtumą

$$\begin{aligned}
\left|\left(1-\frac{u^2}{n^2}\right)^n - 1\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{-u^2}{n^2}\right)^k - 1\right| && \text{(binomo formulė)}\\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{-u^2}{n^2}\right)^k\right| && \text{(suprastiname narį, kai } k=0\text{)}\\
&\le \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{|u|^2}{n^2}\right)^k && \text{(įvertiname)}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{|u|^2}{n}\right)^k\frac{1}{n^{k-1}} && \text{(triukas !)}\\
&\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{|u|^2}{n}\right)^k && \text{(įvertiname } \frac{1}{n^{k-1}}\le 1\text{, kai } k\ge 1\text{)}\\
&\le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{|u|^2}{n}\right)^k && \text{(pridedame narį su } k=0\text{)}\\
&= \frac{1}{n}\left(1+\frac{|u|^2}{n}\right)^n && \text{(binomo formulė)}\\
&\le \frac{1}{n}C(M^2), |u|\le M. && \text{(žinomi įverčiai)} \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

Iš įverčio (4.13) išplaukia, kad

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{u^2}{n^2}\right)^n = 1. \tag{4.14}$$

Tada iš (4.12) gauname

$$f(-u) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{u}{n}\right)^n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{u^2}{n^2}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n} = \frac{1}{f(u)}, u>0. \tag{4.15}$$

Jei abu argumentai neigiami ($u>0, v>0$), tai

$$f(-u-v) = f(-(u+v)) = \frac{1}{f(u+v)} = \frac{1}{f(u)\,f(v)} = f(-u)\,f(-v).$$

Jei argumentai priešingų ženklų ($u>0, v>0, u-v>0$), tai

$$f(u) = f(u-v+v) = f(u-v)\,f(v),$$

$$f(u-v) = \frac{f(u)}{f(v)} = f(u)\,f(-v).$$

Taigi įrodėme (4.9) savybę bet kokiems realiesiems *u* ir *v*.

4.5. Užduotis. Indukcijos metodu įrodykite

$$f(u_1+...+u_n)=f(u_1)\cdot...\cdot f(u_n), u_i\in\mathbb{R}, i=1,...,n. \qquad (4.16)$$

4.6. Užduotis. Naudodamiesi funkcijos f savybėmis (4.16) ir $f(1)=e$, įrodykite

- $f\left(\frac{1}{k}\right)=e^{\frac{1}{k}}=\sqrt[k]{e}, k\in\mathbb{N}$,
- $f\left(\frac{p}{q}\right)=e^{\frac{p}{q}}, p,q\in\mathbb{N}$.

4.7. Funkcijos *f* tolydumas. Iš pradžių tirkime funkcijos f tolydumą taške $u=0$. Reikia prisiminti, kad $f(0)=1$. Tam reikia įvertinti skirtumą

$$\begin{aligned}
|x_n(h)-1| &= \left|\left(1+\frac{h}{n}\right)^n-1\right| && \text{(apibrėžimas)}\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{h}{n}\right)^k-1\right| && \text{(binomo formulė)}\\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{h}{n}\right)^k\right| && \text{(pasinaikina du nariai)}\\
&\le \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{|h|^k}{n^k} && \text{(įvertiname moduliais)}\\
&= |h|\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{|h|^{k-1}}{n^k} && \text{(iškeliame bendrą daugiklį !)}\\
&\le |h|\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} && \text{(įvertiname, kai } |h|\le 1\text{)}\\
&\le |h|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} && \text{(pridedame vieną narį)}\\
&= |h|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n && \text{(binomo formulė)}\\
&\le |h|e. && \text{(žinomas įvertis)} \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Perėję šioje nelygybėje prie ribos, kai $n\to\infty$, gauname

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}|x_n(h)-1|\le e|h|, &&\\
&\left|\lim_{n\to\infty}x_n(h)-1\right|\le e|h|, && \text{(funkcijos } y=|x| \text{ tolydumas)}\\
&|f(h)-1|\le e|h|. && \text{(funkcijos } f \text{ apibrėžimas)} \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Iš pastarojo įverčio išplaukia funkcijos tolydumas taške $u=0$. Bet kokiame taške u galime pasinaudoti pagrindine funkcijos f savybe (4.9) ir nelygybe (4.18)

$$|f(u+h)-f(u)|=|f(u)f(h)-f(u)|=|f(u)||f(h)-1|\le|f(u)|e|h|. \qquad (4.19)$$

Įvertis (4.19) garantuoja funkcijos tolydumą taške u.

4.8. Eksponentinės funkcijos apibrėžimas. Jos savybės. Dabar galime išnagrinėtą funkciją f tikrai pavadinti eksponentine ir sugrįžti prie įprasto žymėjimo

$$\exp(u)=e^u=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n, u\in\mathbb{R}. \qquad (4.20)$$

Funkcijos *f* savybė (4.9) tampa įprasta (laukiama) savybe

$$e^{u+v} = e^u e^v, u, v \in \mathbb{R}.$$

Eksponentinė funkcija griežtai didėjanti.

$$u < v \Rightarrow v = u + h, h > 0,$$
$$e^v = e^{u+h} = e^u e^h > e^u,$$

nes

$$x_n(h) = \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n = 1 + h + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{h^2}{n^2} + ... + \frac{h^n}{n^n} > 1 + h, h > 0, \tag{4.21}$$

$$e^h = \lim_{n\to\infty} x_n(h) \geq 1 + h > 1, h > 0. \tag{4.22}$$

Iš nelygybės (4.22) gauname

$$\lim_{u\to+\infty} e^u \geq \lim_{u\to+\infty} (1+u) = +\infty. \tag{4.23}$$

Iš sąryšių (4.15) ir (4.23) gauname

$$\lim_{v\to-\infty} e^v = \lim_{u\to+\infty} e^{-u} = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{e^u} = 0. \tag{4.24}$$

Formulė (4.20) nusako labai aiškų algoritmą, kaip apskaičiuoti funkcijos reikšmę. Aišku, seka $y_n(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}$ geriau tinka funkcijos reikšmės skaičiavimui, nes sekančiam sekos nariui apskaičiuoti nereikia perskaičiuoti visos sekos, o tik pridėti vieną papildomą dėmenį. Taigi galima eksponentinę funkciją apibrėžti ir taip

$$e^u = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}, u \in \mathbb{R}, \tag{4.25}$$

bet tai būtų jau kita istorija.

4.9. Rodiklinė funkcija su bet kokiu pagrindu. Jei pagrindas *a* yra bet koks teigiamas skaičius, tai rodiklinę funkciją apibrėžiame taip

$$a^u = e^{u \ln a}, u \in \mathbb{R}, \tag{4.26}$$

čia $x = \ln y$ yra atvirkštinė funkcijai $y = \exp(x)$. Bendrąsias atvirkštinių funkcijų savybes nagrinėsime truputį vėliau. Tačiau galime pastebėti, kad funkcija, apibrėžta formule (4.26), turi įprastas rodiklinės funkcijos savybes

- $a^0 = e^{0 \ln a} = e^0 = 1$,
- $a^{u+v} = a^{(u+v)\ln a} = a^{u \ln a + v \ln a} = a^{u \ln a} a^{v \ln a} = a^u a^v$,
- $a^{-u} = e^{-u \ln a} = \dfrac{1}{e^{u \ln a}} = \dfrac{1}{a^u}$.

Funkcija $g(u) = a^u$ tolydi, nes $g(u) = f(h(u))$ yra dviejų tolydžių funkcijų $f(v) = e^v$ ir $v = h(u) = u \ln a$ sudėtinė.

4.10. Finansų matematika. Apibrėžimas (4.20) įdomus tuo, kad turi finansinę prasmę. Ribą

$$e^i = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i^{(n)}}{n}\right)^n = A(1) \tag{4.27}$$

galima interpretuoti, kaip kaupimo funkcijos reikšmę po vieno periodo, kai palūkanos perskaičiuojamos nuolat, o nominali palūkanų norma, perskaičiuojant *n* kartų $i^{(n)}$

nepriklauso nuo *n* ir lygi *i*. Jei *i* yra neigiamas, tai finansinę interpretaciją sugalvoti sunkiau.

Mes nagrinėjome anksčiau ir susidūrėme su techniniais sunkumais skaičiuodami kaupimo funkcijos reikšmę bet kokiu laiko momentu. Pabandysime į šią problemą pažiūrėti truputį kitaip. Reikėtų nagrinėti dviejų argumentų kaupimo funkciją $A(t_1,t_2), t_1 \le t_2$. Ji reikštų esančio laiko momentu t_1 piniginio vieneto sukauptąją iki laiko momento t_2 vertę. Jei argumentą t_1 fiksuotume, tai funkcija pagal argumentą t_2 turėtų būti didėjanti. Be to, $A(t_1,t_1)=1$. Laikoma, kad finansų rinka turi tenkinti suderinamumo principą (principle of consistency)

$$A(t_1,t_3) = A(t_1,t_2)\cdot A(t_2,t_3), t_1 \le t_2 \le t_3 . \tag{4.28}$$

Sakykime, kad finansinė situacija yra visą laiką vienoda (stacionari), t.y. kapitalo prieaugis priklauso tik nuo laiko skirtumo. Matematiškai tai reikštų, kad

$$A(t_1,t_2) = f(t_2 - t_1),$$

čia *f* kažkokia funkcija. Jei pažymėsime $u = t_2 - t_1, v = t_3 - t_2$, tai $t_3 - t_1 = u + v$. Tada sąlyga (4.28) virsta matyta lygybe (4.9)

$$f(u+v) = f(u)f(v). \tag{4.29}$$

Pradžioje galime laikyti, kad *u* ir *v* yra teigiami realieji skaičiai. Įdomu, kokios funkcijos tenkina sąlygą (4.29)? Tokią sąlygą, jei funkcija nežinoma, galima vadinti funkcine lygtimi. Įstatę $u=0, v=0$ į (4.29) gauname $f(0) = f(0)f(0)$. Iš čia $f(0) = 0$ arba $f(0) = 1$. Akivaizdu, kad $f(0) = 0$ būti negali. Analogiškai kaip užduotyje 4.6 gautume, kad

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}}, p, g \in \mathbb{N}, \text{ o } a = f(1). \tag{4.30}$$

Sakykime, kad funkcinės lygties (4.29) sprendinys turi būti tolydi funkcija. Tada paėmę seką racionaliųjų skaičių $\{r_n\}, \lim_{n\to\infty} r_n = u, u \in \mathbb{R}$, gautume

$$f(u) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) \qquad \text{(funkcijos } f \text{ tolydumas)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \qquad \text{(įrodyta (4.30))}$$

$$= a^u . \qquad \text{(funkcijos } v = a^u \text{ tolydumas)}$$

Vadinasi, funkcinės lygties (4.29) tolydus sprendinys gali būti tik laipsninė funkcija. Kas yra *a*? Tai $f(1) = A(0;1)$, t.y. ką piniginis vienetas sukaupė per vieną periodą. Jei palūkanos perskaičiuojamos nuolat, tai $a = f(1) = e^{\delta}$. Vietoje anksčiau vartoto *i* parašėme kitą raidę, nes *i* turės kitą prasmę. Tada

$$a^u = \left(e^{\delta}\right)^u = e^{u \ln e^{\delta}} = e^{u\delta}. \tag{4.31}$$

Jei į pastarąją formulę vietoje kintamojo *u* įstatysime *t*, kuris turės laiko prasmę ir funkciją *f* vėl žymėsime raide *A*, kuri turės kaupimo funkcijos reikšmę, tai gausime

$$A(t) = e^{\delta t}. \tag{4.32}$$

Beje, formulė (4.32) turi prasmę, kai laikas $t < 0$. Tai reiškia, koks turėjo būti įnašas momentu *t*, kad jis iki momento $t = 0$ sukauptų vienetą.

Finansų matematikoje raide *i* be jokių indeksų dažniausiai žymima efektyvioji palūkanų norma, t.y. piniginio vieneto prieaugis per periodą. Šioje situacijoje ji gali būti surasta iš lygties

$$e^{\delta} = 1 + i. \tag{4.33}$$

Vadinasi, $i = e^{\delta} - 1$.