2.3. FUNKCIJOS TOLYDUMAS

3.1. Pavyzdys. Nagrinėkime funkciją $y=\sqrt{x}, x>0,$ taško $x=1$ aplinkoje. Pradžiai pakeiskime kintamuosius $x=1+h$. Gausime funkciją $y=\sqrt{1+h}, h>-1$. Ieškokime tokios pirmojo laipsnio funkcijos $y=1+kh$, kuri būtų didesnė už kvadratinę šaknį. Kokioms k reikšmėms teisinga nelygybė

$$\sqrt{1+h}\le 1+kh, \forall h, h>-1? \tag{3.1}$$

Pakeliame (3.1) nelygybę kvadartu

$$\begin{aligned} 1+h &\le 1+2kh+k^2h^2, \\ h(1-2k) &\le k^2h^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Jei $k=\dfrac{1}{2}$, tai antroji (3.2) nelygybė bus visada teisinga. Galime parašyti tokias nelygybes

$$\begin{aligned} &1\le\sqrt{1+h}\le 1+\frac{1}{2}h, h\ge 0, \\ &\lim_{h\downarrow 0}\sqrt{1+h}=1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Kai $h<0$, tai funkciją $y=\sqrt{1+h}, h>-1$ vertinti iš apačios reikia kitaip. Tikėtina, kad bus teisinga tokia nelygybė

$$\begin{aligned} 1+h &\le\sqrt{1+h}, \\ 1+2h+h^2 &\le 1+h, \\ h+h^2 &\le 0, \\ h(1+h) &\le 0, -1<h<0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Daugikliai kairiojoje paskutinės (3.4) nelygybės pusėje yra priešingų ženklų. Todėl ji teisinga. Iš čia gauname, kad

$$\begin{aligned} &1+h\le\sqrt{1+h}\le 1+\frac{1}{2}h, -1<h<0, \\ &\lim_{h\uparrow 0}\sqrt{1+h}=1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Gavome, kad funkcijos $y=\sqrt{1+h}$ ribos iš kairės ir dešinės taške $h=0$ yra lygios 1. Taigi ir bendra riba $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{1+h}=1$. Jei paimsime bet kokį tašką $a, a>0$, tai galime taip pertvarkyti funkciją

$$\sqrt{x}=\sqrt{a+x-a}=\sqrt{a\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}=\sqrt{a}\sqrt{1+\frac{x-a}{a}}. \tag{3.6}$$

Jei pažymėsime $h=\dfrac{x-a}{a}$, tai matome, kad $h\to 0$, kai $x\to a$. Vadinasi,

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\lim_{x\to a}\sqrt{a}\sqrt{1+\frac{x-a}{a}}=\sqrt{a}\lim_{x\to a}\sqrt{1+\frac{x-a}{a}}=\sqrt{a}. \tag{3.7}$$

Reikėtų dar apskaičuoti ribą $\lim\limits_{x\downarrow 0}\sqrt{x}$. Negalime taikyti pertvarkymų (3.6), nes $a=0.$ Todėl ribą skaičiuosime pagal apibrėžimą, t.y. spręsime nelygybę

$$\begin{aligned} &0<\sqrt{x}<\varepsilon, \\ &0<x<\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Matome, kad galime paimti $\delta=\varepsilon^2$. Taigi $\lim\limits_{x\downarrow 0}\sqrt{x}=0.$ Vadinasi, įrodėme, kad

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a},\forall a,a\geq 0. \tag{3.8}$$

3.2. Apibrėžimas Funkciją *f*, apibrėžtą aibėje $A, A\subset\mathbb{R}$, vadinsime

- tolydžia taške $a, a\in A$, jei $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$;
- tolydžia aibėje *A*, jei ji tolydi kiekviename aibės *A* taške.

Sąryšis (3.8) reiškia, kad kvadratinė šaknis yra tolydi intervale $[0;+\infty)$. Kvadratinės šaknies tolydumą galima įrodyti ir paprasčiau.

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| &= \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| \\
&= \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \\
&\leq \frac{|x-a|}{\sqrt{\frac{a}{4}}+\sqrt{a}}\cdot\left(kai\cdot x\geq\frac{a}{4}\right) \\
&\leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}\left(\frac{1}{\sqrt{4}}+1\right)} \\
&= \frac{|x-a|}{\sqrt{a}\cdot 1.5}<\varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Jei paimsime $\delta=1.5\sqrt{a}\cdot\varepsilon$, tai

$$|x-a|<\delta, x>0\Rightarrow\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\varepsilon. \tag{3.10}$$

3.3. Pastaba. Prisiminkime sekos $y_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ ribos skaičiavimą. Galima rašyti

$$y_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x_n}, \tag{3.11}$$

čia $x_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$ yra posekis žinomos sekos $z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, kuri konverguoja į *e*.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n} \\
&= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n} \\
&= \sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Mes pastarosiose lygybėse naudojamės kvadratinės šaknies tolydumu ir pagrindine funkcijos ribų teorema (arba sudėtinės funkcijos riba). Jei nenorime arba negalime naudotis funkcijos tolydumu (jo tuo metu dar neturėjome), tai reikia gudrauti

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}. \tag{3.13}$$

Dabar jau galima pereiti prie ribos (pirma įsitikinus, kad ribos egzistuoja). Išraiškoje (3.12) reikia tik vienos sekos $\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}$ ribos egzistavimo, o (3.13) – abiejų.

3.4. Užduotis. a) Įrodykite funkcijų $y=\sqrt[3]{x}, y=\sqrt[k]{x}, k=4,5,...$ tolydumą.
b) Apskaičiuokite skirtingais būdais ribą

$$y_n=\left(1+\frac{i}{kn}\right)^n, k\in\mathbb{N}.$$

3.5. Pavyzdys. Nagrinėkime funkciją $y=\frac{1}{x}, x\neq 0.$ Žinome , kad

$$\lim_{x\uparrow 0}\frac{1}{x}=-\infty, \lim_{x\downarrow 0}\frac{1}{x}=+\infty .$$

Kai bent viena vienpusė riba yra begalinė, tai laikome, kad funkcija yra netolydi tame taške.

3.6. Pavyzdys. $y=\sin\frac{1}{x}, x\neq 0.$

Nagrinėkime argumentų sekas $\{x_n\}, x_n>0, \lim_{n\to\infty}x_n=0$ ir atitinkamas funkcijos reikšmių sekas

$$x_n=\frac{1}{2\pi n}, y_n=\sin\frac{1}{x_n}=\sin 2\pi n=0, \lim_{n\to\infty}y_n=0.$$

$$x_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}},\ y_n=\sin\frac{1}{x_n}=\sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Paėmę bet kokį $a,|a|\le 1$, galime rasti tokį $x(a),-\frac{\pi}{2}\le x(a)\le\frac{\pi}{2}$, kad $\sin x(a)=a$.

Tada

$$x_n=\frac{1}{2\pi n+x(a)},\ y_n=\sin\frac{1}{x_n}=\sin(2\pi n+x(a))=\sin x(a)=a.$$

Taigi funkcijos riba, kai $x\to 0$ būdamas teigiamas, neegzistuoja. Aišku, funkcija nėra tolydi taške $x=0$.

3.7. Apibrėžimas. Jei funkcijos *f* bent viena vienpusė riba (t.y. riba iš kairės ar iš dešinės) taške *a* yra begalinė ar išvis neegzistuoja, tai sakome, kad funkcija *f* taške *a* turi antros rūšies trūkį.
Taigi abi funkcijos iš pavyzdžių 3.5 ir 3.6 taške $x=0$ turi antros rūšies trūkį.

3.8. Pavyzdys. Funkcija $y=x-\lfloor x\rfloor$. Užrašykime funkcijos analizinę išraišką

$$\begin{aligned}
&-1\le x<0, \lfloor x\rfloor=-1, x-\lfloor x\rfloor=x+1;\\
&0\le x<1, \lfloor x\rfloor=0, x-\lfloor x\rfloor=x;\\
&1\le x<2, \lfloor x\rfloor=1, x-\lfloor x\rfloor=x-1;\\
&\ldots\\
&k\le x<k+1, \lfloor x\rfloor=k, x-\lfloor x\rfloor=x-k.
\end{aligned}\tag{3.14}$$

Apskaičiuokime ribas iš kairės ir dešinės taškuose $x=k, k\in\mathbb{Z}$,

$$\lim_{x\uparrow k}\left(x-\lfloor x\rfloor\right)=\lim_{x\uparrow k}\left(x-\lfloor k-1\rfloor\right)=k-(k-1)=1,$$
$$\lim_{x\downarrow k}\left(x-\lfloor x\rfloor\right)=\lim_{x\downarrow k}\left(x-\lfloor k\rfloor\right)=k-k=0.$$

Matome, kad sveikuose skaičiuose egzistuoja funkcijos ribos iš kairės ir dešinės, bet jos nėra lygios.

3.9. Apibrėžimas. Jei funkcija taške *a* turi nelygias baigtines ribas iš kairės ir dešinės, tai sakome, kad funkcija turi pirmos rūšies trūkį tame taške. Funkciją vadiname

- tolydžia iš dešinės, jei $\lim_{x\downarrow a} f(x)=f(a)$,
- tolydžia iš kairės, jei $\lim_{x\uparrow a} f(x)=f(a)$.

Mes esame sutikę dvi labai svarbias funkcijas $y=\lfloor x\rfloor$ ir $y=\lceil x\rceil$. Panagrinėkime pirmąją.

$$k\in\mathbb{Z}, k\le x<k+1\Rightarrow\lfloor x\rfloor=k\,. \tag{3.15}$$
$$\lim_{x\uparrow k}\lfloor x\rfloor=\lim_{\substack{x\to k,\\ x<k}}\lfloor x\rfloor=\lim_{\substack{x\to k,\\ k-1\le x<k}}(k-1)=k-1, \tag{3.16}$$
$$\lim_{x\downarrow k}\lfloor x\rfloor=\lim_{\substack{x\to k,\\ k<x}}\lfloor x\rfloor=\lim_{\substack{x\to k,\\ k<x<k+1}}k=k\,. \tag{3.17}$$

Iš (3.15-3.17) matome, kad funkcija $y=\lfloor x\rfloor$ tolydi iš dešinės.

3.10. Užduotis. Įrodykite, kad funkcija $y=\lceil x\rceil$ tolydi iš kairės.

3.11. Teiginys (Aritmetinės tolydžių funkcijų savybės). Jei $f,g:A\to\mathbb{R}$ tolydžios taške *a*, tai

- $f\pm g$ tolydi taške *a*,
- $f\cdot g$ tolydi taške *a*,
- $\dfrac{f}{g}$ tolydi taške *a*, jei $g(a)\ne 0$.

Įrodymas. Tai tiesioginė analogiškų funkcijų ribų savybių išvada.

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x) \qquad \text{(ribų savybė)}$$
$$=f(a)+g(a). \qquad \text{(funkcijų tolydumas)}$$

Taip pat įrodomos ir kitos savybės.

3.12. Teiginys (Sudėtinės funkcijos tolydumas). Sakykime, funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(y=f(x))$ tolydi taške *a*, $b=f(a)$, funkcija $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(z=g(y))$ tolydi taške *b*. Tada sudėtinė funkcija $z=g(f(x))$ tolydi taške *a*.

Įrodymas. Tai taip pat tiesioginė sudėtinės funkcijos ribos išvada. Tačiau įrodymą pateiksiu. Sakykime, $c=g(b)=g(f(a))$. Reikia įrodyti, kad

$$\lim_{x\to a}g(f(x))=c\,. \tag{3.18}$$
$$\forall\varepsilon,\varepsilon>0,\exists\delta,\delta>0,|y-b|<\delta\Rightarrow|g(y)-c|<\varepsilon\,, \tag{3.19}$$
$$\delta,\exists\eta,\eta>0,|x-a|<\eta\Rightarrow|f(x)-b|<\delta\,. \tag{3.20}$$
$$\Rightarrow\forall\varepsilon,\varepsilon>0,\exists\eta,\eta>0,|x-a|<\eta\Rightarrow|g(f(x))-c|<\varepsilon\,.$$

Paskutinioji eilutė reiškia (3.18).

3.13. Trigonometrinių funkcijų tolydumas. Jei laikysime, kad trigonometrinės funkcijos yra gerai apibrėžtos, tai iš nelygybės (2.5) ir elementarių trigonometrinių funkcijų savybių gauname

$$
\begin{aligned}
|\sin x - \sin a| &= 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \\
&\le 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| = 2\sin\left|\frac{x-a}{2}\right| \le 2\left|\frac{x-a}{2}\right| \le |x-a|.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Ši nelygybė reiškia funkcijos $y = \sin x$ tolydumą. Analogiškai įrodykite kosinuso tolydumą (pratimas namie). Iš teiginio 3.12 išplaukia tangento ir kotangento tolydumas tuose taškuose, kur funkcijos apibrėžtos (vardiklis nelygus nuliui).

3.14. Elementariosios funkcijos. Teiginiai 3.11, 3.12 leidžia konstruoti naujas tolydžiąsias funkcijas iš turimų. Viena paprasčiausių tolydžių funkcijų yra $y = x$. Tada iš teiginio 3.11 išplaukia, kad polinomas $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}$, yra tolydi funkcija visoje realiojoje tiesėje. Racionalioji funkcija (dviejų polinomų santykis) $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ yra tolydi visoje tiesėje, išskyrus tuos taškus, kur vardiklis $q(x) = 0$.
Kvadratinės šaknies tolydumas ir teiginys 3.12 leidžia teigti, kad funkcija $f(x) = \sqrt{p(x)}$, čia p – polinomas, yra tolydi aibėje $A = \{x \in \mathbb{R}, p(x) \ge 0\}$. Kaip tik ką įrodėme, trigonometrinės funkcijos ir įvairios jų kombinacijos yra tolydžios funkcijos. Kad eksponentinė funkcija yra tolydi, įrodysime sekančiame skyrelyje.
Laipsninės, rodiklinės, trigonometrinės, jų atvirkštinės funkcijos ir funkcijos, kurios gaunamos iš minėtų baigtiniu skaičiumi aritmetinių operacijų arba sudarant sudėtines funkcijas vadinamos elementariosiomis. Elementariųjų funkcijų sąvoka nėra visiškai griežta. Skyrelyje 2.4 pamatysime, kad elementariosios rodiklinės funkcijos apibrėžimas yra visiškai neelementarus.