2. 2. FUNKCIJŲ RIBŲ SAVYBĖS, JŲ EGZISTENCIJA

2.1. Pavyzdys. Nagrinėkime funkciją $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$. Apskaičiuokime ribas

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-x-1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x^2-\lim\limits_{x\to 0}1}{2\lim\limits_{x\to 0}x^2-\lim\limits_{x\to 0}x-\lim\limits_{x\to 0}1}=\frac{0-1}{2\cdot 0-0-1}=1;$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-x-1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}1}{2\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}1}=\frac{1-1}{2\cdot 1-1-1}=\frac{0}{0};$$

Kažkas negerai. Negalima formaliai pasinaudoti elementariomis funkcijų ribų savybėmis (kurios bus tuojau įrodytos). Reikia pertvarkyti funkciją

$$f(x)=\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)}=\frac{x+1}{2x+1}.$$

Dabar galime skaičiuoti ribą

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)}=\frac{1+1}{2\cdot 1+1}=\frac{2}{3};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}{2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{1-0}{2-0-0}=\frac{1}{2}.$$

2.2. Teiginys. Aritmetinės funkcijų ribų savybės. Sakykime, $A\subset\mathbb{R}$, $f,g:A\to\mathbb{R}$, a – aibės A ribinis taškas. Jei egzistuoja $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b, \lim\limits_{x\to a}g(x)=c,$ tai

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}, \lim\limits_{x\to a}g(x)=c\neq 0.$

Įrodymas. Pateiksime du panašių teiginių įrodymo būdus.

1. Pirmasis pakartoja analogiškų savybių įrodymą sekoms.

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)-(b+c)|&=|(f(x)-b)+(g(x)-c)|\\&\le|f(x)-b|+|g(x)-c|\le\varepsilon,\end{aligned}\tag{2.1}$$

kai $|f(x)-b|<\frac{\varepsilon}{2}, |g(x)-c|<\frac{\varepsilon}{2}$. Iš ribų apibrėžimų išplaukia, kad

$$\begin{aligned} &\exists U_1, U_1 \in V(a), x \in A \cap U_1 \Rightarrow |f(x)-b|<\frac{\varepsilon}{2};\\ &\exists U_2, U_2 \in V(a), x \in A \cap U_2 \Rightarrow |g(x)-c|<\frac{\varepsilon}{2}; \end{aligned} \tag{2.2}$$

kai $x \in U \cap A, U = U_1 \cap U_2$, tai galios abi (2.2) nelygybės ir tuo pačiu nelygybė (2.1).
2. Taikysime pagrindinę ribų teoremą (PRT).

- Paimkime bet kokią seką $\{x_n\}, x_n \in A, x_n \neq a, \forall n, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Iš PRT būtinumo išplaukia, kad $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b, \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = c$;
- Pasinaudojame elementariomis sekų ribų savybėmis $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) + \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = b + c$.
- Iš PRT pakankamumo išplaukia, kad $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = b + c = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Antruoju būdu galima įrodyti ir kitus teiginio tvirtinimus. Norint įrodyti pirmuoju būdu, reikėtų pagalbinių teiginių, analogiškų sekoms.

2.3. Teiginys. Jei egzistuoja funkcijos $y = f(x)$ riba, kai x artėja į a,

- tai tam tikroje taško a aplinkoje funkcija aprėžta;
- jei funkcijos riba nelygi nuliui, tai tam tikroje taško a aplinkoje funkcijos reikšmių moduliai yra didesni už tam tikrą teigiamą konstantą.

<u>Įrodymas</u>.

- Paimkime $\varepsilon = 1$. Tada $\exists V, V \in V(a), x \in V \cap A, x \neq a \Rightarrow a-1 < f(x) < a+1$.
- Sakykime, $b > 0$. Paimkime $\varepsilon = \frac{b}{2}$.

  $\exists V, V \in V(a), x \in V \cap A, x \neq a \Rightarrow b - \frac{b}{2} < f(x) < b + \frac{b}{2} \Rightarrow 0 < \frac{b}{2} < f(x)$.

  Jei $b < 0$, tai paimkime $\varepsilon = \frac{|b|}{2} = -\frac{b}{2}$. Tada

  $\exists V, V \in V(a), x \in V \cap A, x \neq a \Rightarrow b - \left(-\frac{b}{2}\right) < f(x) < b + \left(-\frac{b}{2}\right) \Rightarrow f(x) < \frac{b}{2} < 0$.

Abu atvejus galima sujungti į vieną ir parašyti apibendrintą nelygybę

$$|f(x)| > \frac{|b|}{2} > 0, \text{ kai } x \in V \cap A.$$

2.4. Teiginys. (Dviejų policininkų principas). Sakykime, $A \subset \mathbb{R}, f, g, h : A \to \mathbb{R}$, a – aibės A ribinis taškas. Be to,

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x), x \in U \cap A, U \in V(a)$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.

Tada $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

<u>Įrodymas</u>. Siūlau tai kiekvienam įrodyti pačiam dviem būdais.

2.5. Teiginys. Sudėtinės funkcijos riba. Sakykime,

- $A \subset \mathbb{R}, f : A \to B, B \subset \mathbb{R}$, a – aibės A ribinis taškas, $\lim_{x \to a} f(x) = b$,
- $g : B \to \mathbb{R}$, b – aibės B ribinis taškas, $\lim_{y \to b} g(y) = c$.

Tada $\exists \lim_{x \to a} g(f(x)) = c$.

<u>Įrodymas</u>. Pažymėkime $y = f(x), z = g(y)$.

$$\forall U, U \in V(c), \exists V, V \in V(b), y \in V \cap B \Rightarrow f(y) \in U; \tag{2.3}$$

Taško b aplinkai V iš (2.3)

$$\exists W, W \in V(a), x \in W \cap A \Rightarrow f(x) \in V. \tag{2.4}$$

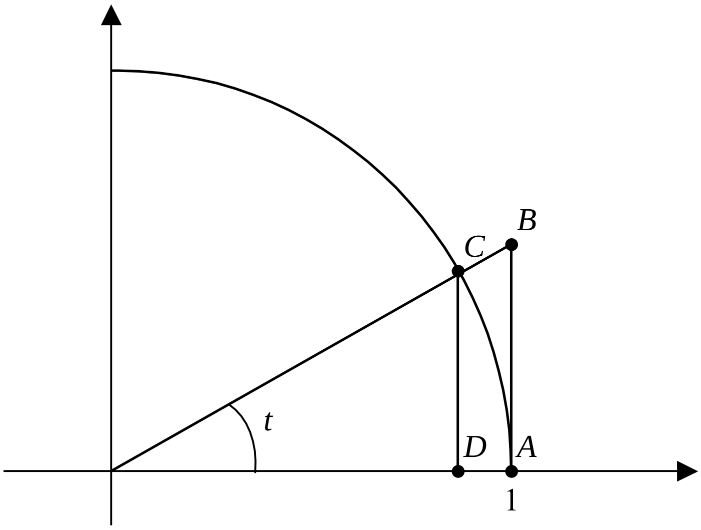
Tada

$$x \in W \cap A \Rightarrow y = f(x) \in V \Rightarrow z = g(f(x)) \in U.$$

Tai reiškia, kad $\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$.

2.6. Užduotis. Paėmę a, b, c baigtinį skaičių, $+\infty$ arba $-\infty$, įrodykite sudėtinės funkcijos ribos teoremą rašydami nelygybes, o ne aplinkas. Kiek skirtigų atvejų gali būti? Kokia puiki užduotis egzaminui!

2.7. Svarbi riba.



Įvardinkime kai kuriuos dydžius, esančius brėžinyje: t = lanko AC ilgis, $\sin t = CD, \tan t = AB$. Galime parašyti akivaizdžias geometrines nelygybes

$$\begin{aligned} &\sin t < t < \tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \\ &\frac{\sin t}{t} < 1 < \frac{\sin t}{t \cos t}, \\ &\cos t < \frac{\sin t}{t} < 1, 0 < t < \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Galima tikėtis, kad $\lim_{t \downarrow 0} \cos t = 1$.

$$0 < 1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2} < 2\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{2}. \tag{2.6}$$

Taigi iš tikrųjų, $\lim_{t \downarrow 0} \cos t = 1$. Tada iš paskutiniosios (2.5) nelygybės išplaukia, kad

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1. \tag{2.7}$$

Apskaičiuosime ribą iš kairės.

$$\lim_{t \uparrow 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{s \downarrow 0} \frac{\sin(-s)}{-s} \qquad \text{(pakeičiame } t = -s \text{)}$$

$$= \lim_{s \downarrow 0} \frac{-\sin s}{-s} = \lim_{s \downarrow 0} \frac{\sin s}{s} = 1. \tag{2.8}$$

Kad gautume norimą rezultatą, reikia įrodyti dar vieną paprastą teiginį.

2.8. Teiginys. Tam, kad egzistuotų funkcijos riba, kai x artėja į a, būtina ir pakankama, kad egzistuotų ribos iš kairės ir dešinės ir jos būtų lygios.

Įrodymas.

Būtinumas.

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = b \Rightarrow \forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \exists \delta, \delta > 0, |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

$$\Rightarrow a - \varepsilon < x < a \text{ ir } a < x < a + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

$$\Rightarrow \lim_{x \uparrow a} f(x) = b, \lim_{x \downarrow a} f(x) = b.$$

Pakankamumas.

$$\exists \lim_{x \uparrow a} f(x) = b, \exists \lim_{x \downarrow a} f(x) = b$$

$$\Rightarrow \exists \delta_1, \delta_1 > 0, a - \delta_1 < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

$$\exists \delta_2, \delta_2 > 0, a < x < a + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Jei apibrėšime $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tai

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Sujungę (2.7), (2.8) ir pasinaudoję tik ką įrodytu teiginiu, gauname

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1. \tag{2.9}$$

2.9. Funkcijos ribos Koši kriterijus. Nagrinėjant sekas buvo pabrėžta, kad ribos egzistencija yra pirmiausias klausimas, į kurį reikia atsakyti. Po to galima kalbėti apie ribos radimą ir jos savybes. Funkcijoms irgi yra panašūs ribų egzistencijos kriterijai. Prisiminsime Koši kriterijų sekoms

$$\exists \lim_{n \to \infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \exists N, n, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Kad būtų kuo didesnė analogija su sekomis, nagrinėsime atvejį, kai funkcija užrašoma $x = f(t), t \in [0; +\infty), t \to +\infty$. Jei apribotume funkciją f natūraliųjų skaičių aibėje $\mathbb{N}$, tai gautume seką $x_n = f(n)$. Perrašykime Koši kriterijų (2.10) tokiai sekai

$$\exists \lim_{n \to \infty} f(n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \exists N, n, m > N \Rightarrow |f(n) - f(m)| < \varepsilon. \tag{2.11}$$

Formulėse (2.11) kintamieji n ir m įgyja reikšmes tik iš natūraliųjų skaičių aibės $\mathbb{N}$. Mes tai suvokiame iš žymėjimų n ir m, nes įpratę natūraliuosius kintamuosius taip žymėti. Būtų galima tai užrašyti formaliau

$$\exists \lim_{n \to \infty} f(n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \exists N, n, m \in \mathbb{N}, n, m > N \Rightarrow |f(n) - f(m)| < \varepsilon. \tag{2.12}$$

Šiose formulėse pakeitę tik vieną simbolį, gautume Koši kriterijų funkcijoms

$$\exists \lim_{n \to \infty} f(n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \exists N, n, m \in \mathbb{R}, n, m > N \Rightarrow |f(n) - f(m)| < \varepsilon. \tag{2.13}$$

Tačiau formulėse (2.13) kintamiesiems *n*, *m* suteikiama neįprasta prasmė - $n, m \in \mathbb{R}$. Todėl reikėtų kintamuosius *n*, *m* pakeisti į *t*, *s* arba t', t'', arba t_1, t_2 (kad mūsų bosui būtų ramiau, mūsų kaimynams būtų ramiau, mums visiems būtų ramiau). Po tokių pastabų Koši kriterijus skambėtų taip

$$\exists \lim_{t\to\infty} f(t) \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \exists N, t, s \in \mathbb{R}, t, s > N \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \varepsilon . \qquad (2.14)$$

Jeigu iš konteksto akivaizdu, kad kalbame apie tolydaus argumento funkciją ($t \in \mathbb{R}$), tai to visą laiką nekartojame.

Teorema. Koši kriterijus funkcijų riboms. Sakykime, $f : [1; +\infty) \to \mathbb{R}$. Tada

$$\exists \lim_{t\to\infty} f(t) \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \exists \Delta, t, s > \Delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \varepsilon . \qquad (2.15)$$

Įrodymas. Būtinumas trivialus.

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = b \Rightarrow \forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \exists \Delta, t > \Delta \Rightarrow |f(t) - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$t > \Delta, s > \Delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| = |f(t) - b + b - f(s)|$$

$$\leq |f(t) - b| + |f(s) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Pakankamumas. Naudosimės pagrindine ribų teorema. Paimkime seką

$$\{t_n\}, t_n \geq 1, \forall n, \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty \qquad (2.16)$$

ir ε, Δ iš (2.15). Tada egzistuos toks N (iš (2.16)), kad

$$n, m > N \Rightarrow t_n > \Delta, t_m > \Delta \Rightarrow |f(t_n) - f(t_m)| < \varepsilon .$$

Tai reiškia, kad funkcijos reikšmių seka $\{f(t_n)\}$ tenkina Koši sąlygą. Vadinasi ji konverguoja. Iš pagrindinės ribų teoremos išplaukia, kad $\exists \lim_{t\to\infty} f(t)$.

Galima suformuluoti Koši kriterijų ir kai *a* baigtinis.

Koši kriterijus baigtiniam ribiniam taškui. Sakykime, $f : A \to \mathbb{R}, a$ - aibės *A* baigtinis ribinis taškas. Tada

$$\exists \lim_{t\to a} f(t) \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \exists \delta, \delta > 0, t, s \in (a - \delta; a + \delta), t, s \neq a \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \varepsilon . \qquad (2.17)$$

Įrodymas analogiškas atvejui, kai $a = +\infty$.

2.10. Pavyzdys. Nubrėžkime sekos $\{x_n\}$ grafiką, t.y. atidėkime taškus $(n; x_n), n \in \mathbb{N}$, koordinačių plokštumoje. Sujunkime tuos taškus tiesių atkarpomis. Gausime funkciją $x = f(t)$, apibrėžtą intervale $[1; +\infty)$, tenkinančią sąlygą $x_n = f(n), \forall n$. Galima parašyti tokios funkcijos analizinę išraišką

$$f(t) = x_n + (t - n)(x_{n+1} - x_n), n \leq t \leq n + 1, \forall n. \qquad (2.18)$$

Akivaizdu, kad $f(n) = x_n$, $f(n+1) = x_{n+1}$. Galima tikėtis, kad jei seka tenkina Koši sąlygą, tai ir funkcija tenkins Koši sąlygą. Reikia išreikšti skirtumą $|f(t) - f(s)|$, kai $t, s \in \mathbb{R}$ per sekos $\{x_n\}$ narių skirtumus. Tam labai gerai tiktų anksčiau apibrėžtos funkcijos $\lfloor t \rfloor$ ir $\lceil t \rceil$ (grindys ir lubos). Galima parašyti tokias nelygybes

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &= |f(t) - f(\lfloor t \rfloor) + f(\lfloor t \rfloor) - f(\lfloor s \rfloor) + f(\lfloor s \rfloor) - f(s)| \\ &\leq |f(t) - f(\lfloor t \rfloor)| + |f(\lfloor t \rfloor) - f(\lfloor s \rfloor)| + |f(\lfloor s \rfloor) - f(s)| \end{aligned} \qquad (2.19)$$

Kai $\lfloor t \rfloor \leq t \leq \lceil t \rceil$, tai

$$\begin{aligned} |f(t) - f(\lfloor t \rfloor)| &\leq |t - \lfloor t \rfloor| \, |f(\lceil t \rceil) - f(\lfloor t \rfloor)| \\ &\leq 1 \cdot |f(\lceil t \rceil) - f(\lfloor t \rfloor)| = |f(\lceil t \rceil) - f(\lfloor t \rfloor)| \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Paskutinysis narys (2.20) nelygybėje yra skirtumas tarp dviejų gretimų sekos narių.
Taip pat įsivertintų ir

$$|f(s)-f(\lfloor s\rfloor)|\le|f(\lceil s\rceil)-f(\lfloor s\rfloor)|. \qquad (2.21)$$

Jei seka tenkina Koši sąlygą, t.y.

$$\forall\varepsilon,\varepsilon>0,\exists N,n,m\in\mathbb{N},n,m>N\Rightarrow|f(n)-f(m)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

tai paėmę $\Delta=N+1$ ir pasinaudoję (2.19),(2.20),(2.21), gausime

$$t,s>\Delta\Rightarrow|f(t)-f(s)|\le|f(\lceil t\rceil)-f(\lfloor t\rfloor)|+|f(\lfloor t\rfloor)-f(\lfloor s\rfloor)|+|f(\lfloor s\rfloor)-f(\lceil s\rceil)|$$

$$\le\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

2.11. Monotoniškų funkcijų ribos. Pastaba dėl terminologijos. Funkcija *f*, apibrėžta intervale *I* ir $\forall x_1,x_2\in I$ tenkinanti atitinkamą sąlygą vadinama

- **griežtai didėjančia** (didėjančia), jei $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$;
- **griežtai mažėjančia** (mažėjančia), jei $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$;
- nemažėjančia (**didėjančia**), jei $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$;
- nedidėjančia (**mažėjančia**), jei $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$.

Ne skliausteliuose paminėti terminai visada suprantami vienareikšmiškai. Tačiau terminai su neigiama dalelyte “ne” truputį neskamba, todėl mes labiau vartosime pajuodintus terminus.
Tokias pat pastabas dėl terminijos galima padaryti ir sekoms.
Teorema. Sakykime, funkcija *f* yra didėjanti ir aprėžta intervale (*a*; *b*). Tada $\exists\lim_{x\uparrow b}f(x),\exists\lim_{x\downarrow a}f(x)$.
Įrodymas. Sakykime,

$$m\le f(x)\le M,\forall x,x\in(a;b).$$

Funkcijos *f* reikšmių aibė $A=\{f(x);x\in(a;b)\}$ yra aprėžta, todėl egzistuoja jos tikslusis viršutinis rėžis $\sup A=\sup\{f(x);x\in(a;b)\}=c$. Natūralu tikėtis, kad šitas *c* turėtų būti funkcijos riba, kai *x* artėja į *b* iš kairės. Paimkime bet kokį teigiamą ε.
Tada skaičius $c-\varepsilon$ nebebus aibės *A* viršutiniu rėžiu. Todėl

$$\exists x',x'\in(a;b),c-\varepsilon<f(x'). \qquad (2.22)$$

Kadangi funkcija didėjanti, tai

$$\forall x,x'<x<b,\Rightarrow c-\varepsilon<f(x')\le f(x)\le c.$$

Tai reiškia, kad $\lim_{x\uparrow b}f(x)=c$.

Analogiškai galima įrodyti, kad $\lim_{x\downarrow a}f(x)=\inf\{f(x);x\in(a;b)\}$.

2.12. Užduotis. Kodėl teoremos (2.11) įrodymui nebuvo naudota pagrindinė ribų teorema?