2.1. Funkcijos riba

Motyvacija. Matematinės analizės pagrindinis instrumentas yra diferencialinis skaičiavimas. Pirmiausia reikia mokėti apibrėžti funkcijos išvestinę. Sakykime, turime funkciją $y = f(x), x \in \mathbb{R}.$ Nubrėžkime jos grafiką. Pasirinkime du taškus grafike $\left(x_0; f(x_0)\right), \left(x_1; f(x_1)\right)$. Nubrėžkime per šiuos taškus kirstinę. Apskaičiuokime šios kirstinės posvyrį

$$posv(kirst) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{1.1}$$

Jei argumentą x_1 artinsime prie x_0, tai kirstinė artės (gali artėti) prie tam tikros tiesės, kurią natūralu laikyti funkcijos grafiko liestine, o ribą

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0) \tag{1.2}$$

vadiname funkcijos *f* išvestine taške x_0. Akivaizdu, kad išvestinės geometrinė prasmė yra liestinės posvyris. Taigi norint apibrėžti išvestinės sąvoką, reikia turėti griežtą ribos apibrėžimą.

Pavyzdys. Funkcijos ribos apibrėžimai. Mūsų patirtis iš pirmosios dalies yra trys sekos ribų apibrėžimai:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \exists N, n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall E, E > 0, \exists N, n > N \Rightarrow x_n > E;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall E, E > 0, \exists N, n > N \Rightarrow x_n < -E.$$

Nagrinėkime funkciją $y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$ Iš mokyklos laikų mokame brėžti tokios funkcijos grafiką. Gauta kreivė yra vadinama hiperbole. Žiūrėdami į grafiką galime užrašyti keletą ribų

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0;$$

$$\lim_{\substack{x\to0,\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty = \lim_{x\to-0} \frac{1}{x} = -\infty = \lim_{x\uparrow0} \frac{1}{x} = -\infty; \tag{1.3}$$

$$\lim_{\substack{x\to0,\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty = \lim_{x\to+0} \frac{1}{x} = +\infty = \lim_{x\downarrow0} \frac{1}{x} = +\infty; \tag{1.4}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{1}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Riba (1.3) vadinama riba iš kairės, o (1.4) – riba iš dešinės. Literatūroje galima rasti tris skirtingus šių ribų žymėjimus. Mes laikysime, kad visi trys žymėjimai yra geri. Dabar galime pabandyti apibrėžti, ką turėtų reikšti tie užrašai. Ribas užrašėme eidami iš kairės į dešinę, bet apibrėžimus rašykime atvirkščiai, nes taip bus paprasčiau juos apibrėžti.

Apibrėžimai 1.1.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon,\varepsilon>0,\exists\Delta,\Delta>0,x>\Delta\Rightarrow\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon\,; \qquad (1.5)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon,\varepsilon>0,\exists\delta,\delta>0,|x-1|<\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{x}-1\right|<\varepsilon\,; \qquad (1.6)$$

$$\lim_{\substack{x\to0,\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty \Leftrightarrow \forall E,E>0,\exists\delta,\delta>0,0<x<\delta\Rightarrow\frac{1}{x}>E\,; \qquad (1.7)$$

$$\lim_{\substack{x\to0,\\ x<0}}\frac{1}{x}=-\infty \Leftrightarrow \forall E,E<0,\exists\delta,\delta>0,-\delta<x<0\Rightarrow\frac{1}{x}<E\,; \qquad (1.8)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon,\varepsilon>0,\exists E,E>0,x<-E\Rightarrow\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon\,. \qquad (1.9)$$

Pastaba 1.1. Mažosiomis raidėmis priimta žymėti tuos dydžius, kurie įgyja mažas reikšmes (ε,δ), o didžiosiomis tuos dydžius, kurie įgyja dideles reikšmes (N,E,Δ). Aišku, tai nėra būtina. Bet, jei žmogus, rašydamas apibrėžimą, skiria didžiąją raidę nuo mažosios, tai rodo, kad jis "jaučia" apibrėžimą, o ne tik formaliai rašo iš atminties. Norint patikrinti, kad ribų sąryšiai parašyti teisingai, reikia išspręsti nelygybes, kurios yra dešiniosiose apibrėžimų 1.5 – 1.9 pusėse. Visos nelygybės yra labai paprastos ir sprendžamos vienu veiksmu, išskyrus (1.6), kurią ir spręsime.

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{x}-1\right|<\varepsilon,\\
&-\varepsilon<\frac{1}{x}-1<\varepsilon,\\
&1-\varepsilon<\frac{1}{x}<1+\varepsilon,\\
&\frac{1}{1-\varepsilon}>x>\frac{1}{1+\varepsilon},\varepsilon<1,\\
&\frac{1+\varepsilon-\varepsilon}{1+\varepsilon}<x<\frac{1-\varepsilon+\varepsilon}{1-\varepsilon},\\
&1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}<x<1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.
\end{aligned} \qquad (1.10)$$

Tiksliai išsprendėme nelygybę (1.6). Tačiau negavome simetriško intervalo $(1-\delta;1+\delta)$. Jei norime gauti tokį intervalą, tai reikia apibrėžti

$$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right\}=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}. \qquad (1.11)$$

Galime reziumuoti

$$|x-1|<\delta,\delta=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\Rightarrow1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}<x<1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\Rightarrow\left|\frac{1}{x}-1\right|<\varepsilon\,. \qquad (1.12)$$

Mes parašėme penkis skirtingus ribų apibrėžimus funkcijai $f(x)=\frac{1}{x}$. Tikiuosi, kad kiekvienam akivaizdu, kaip reikia parašyti atitinkamus apibrėžimus bet kokiai funkcijai.

Kaip toliau dėstyti ribų teoriją? Matėme, kad visi apibrėžimai truputį skiriasi vienas nuo kito. Galimi du kraštiniai variantai:

- suformuluoti ir išdėstyti gana bendrą teoriją, kad visi paminėti atvejai išplauktų iš bendros teorijos;
- viską dėstyti atskiru atveju, o po to pasakyti, kad kiti atvejai nagrinėjami analogiškai.

Mes bandysime dėstyti gana bendrą teoriją, bet viską iliustruosime pavyzdžiais. Pradžiai reikės naujos – aplinkos – sąvokos.

Aplinkos. Ribų apibrėžimuose jau buvome sutikę intervalus $(a-\delta;a+\delta),(b-\varepsilon;b+\varepsilon),(E;+\infty),(-\infty;\Delta)$. Šie intervalai ir yra atitinkamų taškų $a,b,+\infty,-\infty$ paprasčiausios aplinkos. Tačiau matematikoje yra patogu truputį praplėsti aplinkos sąvoką. Apibrėšime praplėstąją realiųjų skaičių aibę $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$. Nagrinėsime trijų rūšių aplinkas – tai baigtinių taškų, $-\infty$ ir $+\infty$.

Apibrėžimai 1.2. Realiųjų skaičių poaibį U vadinsime

- taško $a, a\in\mathbb{R}$, aplinka, jei $\exists\varepsilon,\varepsilon>0,$ kad $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)\subset U$;
- taško $+\infty$ aplinka, jei $\exists E, E>0,$ kad $(E;+\infty)\subset U$;
- taško $-\infty$ aplinka, jei $\exists E, E<0,$ kad $(-\infty;E)\subset U$.

Pavyzdžiai.

1. $\mathbb{R}$ yra bet kokio baigtinio ar begalinio taško aplinka.
2. $\mathbb{N}$ nėra jokio baigtinio arba begalinio taško aplinka.
3. Intervalas $[0;1]$ yra bet kokio taško $x\in(0;1)$ aplinka. Galima apibrėžti $\varepsilon=\min\{x;1-x\}$. Bet nėra taško 0 arba1 aplinka, nes joks intervalas $(-\varepsilon;\varepsilon)\not\subset[0;1]$ arba $(1-\varepsilon;1+\varepsilon)\not\subset[0;1]$.
4. Aibė $(-1;0.5)\cup\mathbb{N}$ yra taško 0 aplinka.

Visų taško a aplinkų aibę žymėsime $V(a)$.

Teiginys 1.1 (aplinkų savybės).

1. Baigtinio skaičiaus taško $a, a\in\overline{\mathbb{R}}$, aplinkų sankirta yra to taško aplinka.
2. Bet kokio skaičiaus taško $a, a\in\overline{\mathbb{R}}$, aplinkų sąjunga yra to taško aplinka.

Įrodymas.

1. Sakykime, $U_i, i=1,...,m$ yra taško a aplinkos. Reikia įrodyti, kad aibė $U=\bigcap_{i=1}^{m}U_i$ yra taško a aplinka. Skirsime atvejus, kai $a\in\mathbb{R}, a=-\infty, a=+\infty$.

   Jei a baigtinis, tai $\forall i, i=1,...,m, \exists\varepsilon_i,\varepsilon_i>0,\left(a-\varepsilon_i;a+\varepsilon_i\right)\subset U_i$. Apibrėžkime $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_m\}$. Akivaizdu, kad $\varepsilon>0$. Tada

   $$\forall i, i=1,...,m,(a-\varepsilon;a+\varepsilon)\subset(a-\varepsilon_i;a+\varepsilon_i)\subset U_i\subset\bigcap_{i=1}^{m}U_i=U.$$

   Jei $a=+\infty$, tai $\forall i, i=1,...,m, \exists E_i, E_i>0,\left(E_i;+\infty\right)\subset U_i$. Apibrėžkime $E=\max\{E_1,...,E_m\}$. Tada $\forall i, i=1,...,m,(E;+\infty)\subset(E_i;+\infty_i)\subset U_i\subset\bigcap_{i=1}^{m}U_i=U$.

   Atvejį $a=-\infty$ paliekame skaitytojui.
2. Sakykime $U_\alpha,\alpha\in A,$ yra taško a aplinkos. Čia A – bet kokia indeksų aibė. Reikia įrodyti, kad aibė $U=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$ yra taško a aplinka. Paimkime bet kokią taško a aplinką U_{α_0}. Tada priklausomai nuo to, koks yra a, t.y.

$a \in \mathbb{R}, a = -\infty, a = +\infty$, egzistuos tokie intervalai

$(a-\varepsilon; a+\varepsilon), (-\infty; E), (E; +\infty)$, kurie bus U_{α_0} poaibiai, o tuo pačiu ir U poaibiai.

Aplinkos $\{(a-\varepsilon; a+\varepsilon), \varepsilon > 0\}$ vadinamos bazinėmis arba fundamentinėmis taško a aplinkomis. Dar jos vadinamos ε - aplinkomis.

Analogiškai $\{(E; +\infty), E \in \mathbb{R}\}, \{(-\infty; E), E \in \mathbb{R}\}$ vadinamos bazinėmis arba fundamentinėmis atitinkamai taškų $+\infty, -\infty$ aplinkomis.

Ribinis taškas. Sakykime, turime funkciją, apibrėžtą aibėje $A, A \subset \mathbb{R}$. Tai žymėsime

$$f : A \to \mathbb{R} \tag{1.13}$$

Kad galėtume kalbėti apie kokią nors funkcijos ribą, reikia, kad aibė *A* būtų pakankamai turtinga, tiksliau, ji turi turėti ribinį tašką.

Apibrėžimas 1.3. Tašką $a, a \in \overline{\mathbb{R}}$, vadinsime aibės $A, A \subset \mathbb{R}$, ribiniu tašku, jei bet kokioje taško a aplinkoje yra bent vienas aibės *A* taškas, nesutampantis su pačiu a.

Pavyzdžiai.

1. $A = \mathbb{N}$. Ribinis taškas $a = +\infty$.
2. $A = (0; +\infty)$. Visi intervalo $(0; +\infty)$ taškai yra ir ribiniai taškai. Be to, 0 ir $+\infty$ taip pat yra aibės *A* ribiniai taškai.
3. $A = (-\infty; 0)$. Kiekvienas intervalo taškas, nulis ir $-\infty$ yra ribiniai taškai.

Dabar galima pateikti bendrą funkcijos ribos apibrėžimą.

Apibrėžimas 1.4. Sakykime, $A \subset \mathbb{R}$, a – aibės *A* ribinis taškas, $f : A \to \mathbb{R}$. Tašką *b*, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, vadinsime funkcijos *f* riba, kai *x* artėja į *a*, ir žymėsime $b = \lim_{x \to a} f(x)$, jei

$$\forall U, U \in V(b), \exists V, V \in V(a), x \in V \cap A \Rightarrow f(x) \in U. \tag{1.14}$$

Pastaba 1.2. Dažnai ribinis taškas nepriklauso pačiai aibei. Tada sąlyga (1.14) nereikalauja jokių paaiškinimų. Jei ribinis aibės *A* taškas a priklauso aibei, tai sąlygos (1.14) pabaigą reikia truputį pataisyti

$$x \in V \cap A, x \neq a, \Rightarrow f(x) \in U. \tag{1.15}$$

Šiuo atveju mes griežtai atskiriame funkcijos ribą, kai *x* artėja į *a*, nuo funkcijos reikšmės taške a. Šie du dydžiai gali nesutapti.

Pavyzdys. Matematikoje yra naudojama ženklo funkcija, apibrėžta visoje realiųjų skaičių tiesėje $(A = \mathbb{R})$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Ieškosime ribos, kai $x \to 0$ $(a = 0)$. Sąryšiui (1.15) iliustruoti geriau tinka funkcija

$$|\operatorname{sgn}(x)| = \begin{cases} 1, x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Panašu, kad $\lim_{x \to 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1$. Patikrinkime tai pagal apibrėžimą. Sąlygoje (1.14) esančias aplinkas pakeiskime paprastesnėmis (bazinėmis arba fundamentinėmis) aplinkomis. Paimkime bet kokį $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$. Tai atitinka taško $b = 1$ aplinką $U = (1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$. Galėsime imti bet kokį teigiamą δ arba taško $a = 0$ aplinką $(-\delta; \delta)$. Tada

$$V \cap A = (-\delta; \delta) \cap \mathbb{R} = (-\delta; \delta),$$

$$x \in V \cap A \Leftrightarrow x \in (-\delta;\delta) \Leftrightarrow -\delta < x < \delta \;,$$
$$f(x) \in V \Leftrightarrow |\mathrm{sgn}(x)| \in (1-\varepsilon;1+\varepsilon) \Leftrightarrow 1-\varepsilon < |\mathrm{sgn}(x)| < 1+\varepsilon$$
ir akivaizdu, kad
$$-\delta < x < \delta \not\Rightarrow 1-\varepsilon < |\mathrm{sgn}(x)| < 1+\varepsilon, \tag{1.18}$$
bet
$$-\delta < x < \delta, x \neq 0 \Rightarrow 1-\varepsilon < |\mathrm{sgn}(x)| < 1+\varepsilon \,. \tag{1.19}$$
Taigi sąlygos (1.14) pakeitimas sąlyga (1.15) yra esminis ribos apibrėžime, kai ribinis taškas priklauso aibei *A*.

Teorema 1.1. (Pagrindinė ribų teorema). Sakykime, $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, a – aibės *A* ribinis taškas. Tam, kad egzistuotų funkcijos f riba, kai *x* artėja į *a*, būtina ir pakankama, kad
$$\forall\{x_n\}, x_n \in A, x_n \neq a, \forall n, \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) \,. \tag{1.20}$$
Įrodymas. Būtinumas. Reikia įrodyti
$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = b \qquad \Rightarrow \qquad \text{sąlyga (1.20).}$$
Paimkime bet kokią seką, tenkinančią sąlygos (1.20) prielaidą, t,y.
$$\{x_n\}, x_n \in A, x_n \neq a, \forall n, \lim_{n\to\infty} x_n = a \,. \tag{1.21}$$
Paimkime bet kokią taško *b* bazinę aplinką *U* ($(b-\varepsilon;b+\varepsilon),(-\infty;E),(E;+\infty)$ - priklausomai nuo to, koks yra taškas *b*). Iš funkcijos ribos apibrėžimo gauname, kad
$$\exists V, V \in V(a), x \in V \cap A, x \neq a \Rightarrow f(x) \in U \,. \tag{1.22}$$
Iš sąlygos (1.21) ir sekos ribos apibrėžimo išplaukia, kad $\exists N, n > N \Rightarrow x_n \in V$. Jei $x_n \in A \cap V, x_n \neq a, \forall n,$ tai iš (1.22) išplaukia, kad $f(x_n) \in V$. Tai reiškia, kad $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Pakankamumas. Reikia įrodyti:
$$\left\{\forall\{x_n\}, x_n \in A, x_n \neq a, \forall n, \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n)\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x) \tag{1.23}$$
Paimkime dvi argumentų sekas $\{x_n\}, \{x_n'\}$, tenkinančias sąlygą (1.21). Tada iš (1.23) prielaidos išplaukia, kad $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b, \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = b'$. Sakykime, kad $b \neq b'$. Tada taškus *b* ir b' galime atskirti nesikertančiomis aplinkomis, t.y. egzistuoja tokios $U, U \in V(b), U' \in V(b'), U \cap U' = \varnothing$. Iliustruojame

- $b, b' \in \mathbb{R}, U = (b-\varepsilon;b+\varepsilon), U' = (b'-\varepsilon;b'+\varepsilon), \varepsilon = \dfrac{|b-b'|}{3},$
- $b \in \mathbb{R}, b' = +\infty, U = (b-1;b+1), U' = (b+2;+\infty),$
- $b = -\infty, b' \in \mathbb{R}, U = (-\infty;b'-2), U' = (b'-1;b'+1).$

Iš sekos ribos apibrėžimo išplaukia, kad
$$\exists N, n > N \Rightarrow f(x_n) \in U, f(x_n') \in U' \,. \tag{1.24}$$
Sudarykime naują seką $x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots, x_n, x_n', \ldots$. jei ją pažymėsime $\{z_n\}$, tai galime parašyti $z_{2n-1} = x_n, z_{2n} = x_n'$. Akivaizdu, kad $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, nes $\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} z_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n' = a$, bet funkcijos reikšmių seka $\{f(z_n)\}$ nekonverguoja (tai išplaukia iš (1.24)).

Vadinasi, kokią argumentų seką $\{x_n\}$, tenkinančią sąlygą (1.21), bepaimtume, funkcijos reikšmių sekos $\{f(x_n)\}$ konverguos į kažkokią vienintelę reikšmę, kurią galime pažymėti *b*. Tai, ką įrodėme, užrašysime formaliau

$$\left\{\forall\{x_n\}, x_n \in A, x_n \neq a, \forall n, \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\forall\{x_n\}, x_n \in A, x_n \neq a, \forall n, \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists! b, b \in \overline{\mathbb{R}}, \lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = b\right\} (1.25)$$

Galime tikėtis, kad $\lim_{x\to a} f(x) = b.$ Tai įrodysime prieštaros būdu. Tarsime, kad teoremos tvirtinimas neteisingas ir įrodysime, kad tai prieštarauja sąlygai (1.25). Tada reikėtų sukonstruoti tokią seką $\{x_n\}$, tenkinančią sąlygą (1.21), kad funkcijos reikšmių seka $\{f(x_n)\}$ nekonverguotų į *b*. Pradžiai reikia suformuluoti, ką reiškia, kad funkcijos riba nėra *b*.

$$\exists U, U \in V(b), \forall V, V \in V(a), \exists x, x \in V \cap A, x \neq a \Rightarrow f(x) \notin U \qquad (1.26)$$

Remiantis šia (1.26) sąlyga reikia gauti argumentų seką, aptartą anksčiau. Antroje sąlygos (1.26) frazėje kvantorius $\forall$ leidžia paimti aplinkų seką $\{V_n\}$ ir kiekvienai aplinkai surasti atitinkamą argumentą x_n. Priklausomai nuo to, koks yra taškas a, imsime tokias aplinkas

$$a \in \mathbb{R}, V_n = \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right), a = -\infty, V_n = (-\infty; -n), a = +\infty, V_n = (n; +\infty). (1.27)$$

Remiantis (1.26) galime rasti tokius $x_n \in V_n, \forall n,$ kad $f(x_n) \notin U$. Tada visais atvejais $\lim_{n\to\infty} x_n = a,$ bet seka $\{f(x_n)\}$ nekonverguoja į *b*. Tai prieštarauja (1.25).