2.8. Teiloro formulė ir jos taikymai

8.1. Įvadas. Lagranžo teoremą

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)\,,\ \xi\in(x_0;x)\,, \tag{8.1}$$

galima interpretuoti kaip skirtumo $r_0(x)=f(x)-f(x_0)$ įvertį. Jei f' yra tolydi taške x_0, tai $f'(x)=f'(x_0)+o(1), x\to x_0$. Kadangi $\xi=\xi(x;x_0)\in(x_0;x)$, tai

$$f'(\xi)=f'(\xi(x;x_0))=f'(x_0)+o(1), x\to x_0\,. \tag{8.2}$$

Tada iš (8.1) gauname

$$\begin{aligned} f(x)-f(x_0)&=f'(x_0)(x-x_0)+o(1)(x-x_0),\\ &=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0), x\to x_0. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Jei pažymėsime $r_1(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$, tai sąryšis (8.3) reiškia, kad $r_1(x)=o(x-x_0), x\to x_0$, t.y. artėja į nulį greičiau nei $x-x_0$. Kyla klausimas, ar negalime skirtumo $r_1(x)$ surasti tiksliai kaip Lagranžo teoremoje? Panagrinėkime pavyzdį $f(x)=ax^2+bx+c$. Tada $f(x_0)=ax_0^2+bx_0+c$, $f'(x_0)=2ax_0+b$ ir nesunku suskaičiuoti

$$r_1(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=a(x-x_0)^2\,.$$

Bet $a=\frac{1}{2}f''(x)=\frac{1}{2}f''(x_0)$. Taigi šiuo konkrečiu atveju gavome tikslų atsakymą

$$r_1(x)=\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2\,. \tag{8.4}$$

8.2. Lagranžo formos liekamasis narys, n = 1. Pateiksiu įrodymą, kuris yra V.Kabailos vadovėlyje. Sakykime, kad $x>x_0$. Apibrėžkime funkciją $\varphi:[x_0;x]\to\mathbb{R}$ lygybe:

$$\varphi(t)=f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)\,. \tag{8.5}$$

$\varphi(x)=0, \varphi(x_0)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=r_1(x)$. Laikysime, kad funkcija *f* yra dukart diferencijuojama. Apskaičiuokime funkcijos φ išvestinę

$$\varphi'(t)=-f'(t)-f''(t)(x-t)+f'(t)=-f''(t)(x-t)\,.$$

Jei ψ bet kokia tolydi intervale $[x_0;x]$, diferencijuojama intervale $(x_0;x)$ funkcija ir $\psi'(t)\neq 0$ visiems $t\in(x_0;x)$, tai pagal Koši teoremą egzistuoja toks $\xi\in(x_0;x)$, kad

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}. \tag{8.6}$$

Paimkime $\psi(t)=(x-t)^2$. Tada $\psi(x)=0, \psi(x_0)=(x-x_0)^2$ ir $\psi'(t)=-2(x-t)$.

Įstatykime visus reikiamus dydžius į formulę (8.6):

$$\frac{-r_1(x)}{-(x-x_0)^2}=\frac{-f''(\xi)(x-\xi)}{-2(x-\xi)},$$

$$r_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2.$$

Tokią pat formulę gautume, jei nagrinėtume intervalą $[x;x_0], x<x_0$.

Įrodėme teiginį, kurį galima suformuluoti taip:

Teiloro teorema (Brook Taylor, 1685-1731). *Jei funkcija f yra dukart diferencijuojama intervale* $(a;b)$, *taškai* $x_0, x, x_0 \neq x$, *priklauso šiam intervalui, tai egzistuoja toks taškas* ξ *tarp* x *ir* x_0 *, kad*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x), \tag{8.7}$$

$$r_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2. \tag{8.8}$$

Formulė (8.7) vadinama Teiloro formule, polinomas $p_{Teil,1}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ *vadinamas Teiloro polinomu, o liekamasis narys (8.8) vadinamas Lagranžo formos liekamuoju nariu.*

8.3. Peano formos liekamasis narys, n = 2, (Giuseppe Peano, 1858-1932).
Sakykime, kad funkcijos *f* antroji išvestinė f'' yra tolydi taške x_0. Tada galime pakartoti samprotavimus kaip 8.1 pradžioje, t.y.

$$f''(x) = f''(x_0) + o(1), x \to x_0,$$

$$f''(\xi) = f''(x_0) + o(1), x \to x_0,$$

nes $\xi = \xi(x; x_0) \in (x_0; x)$ ir $\xi \to x_0$, kai $x \to x_0$. Pertvarkykime formules (8.7) ir (8.8)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0) + o(1)}{2}(x - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), x \to x_0 \end{aligned} \tag{8.9}$$

nes $o(1)(x - x_0)^2 = o((x - x_0)^2), x \to x_0$. Įrodėme teoremą

Teiloro teorema. *Sakykime, kad galioja visos tos pačios sąlygos kaip ir ankstesnėje Teiloro teoremoje ir funkcijos f antroji išvestinė* f'' *yra tolydi taške* x_0. *Tada teisinga formulė (8.9).*

Dabar Teiloro polinomas yra $p_{Teil,2}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$, o liekamasis narys $r_2(x) = f(x) - P_{Teil,2}(x) = o((x - x_0)^2), x \to x_0$ vadinamas Peano formos liekamuoju nariu.

8.4. Bendrasis Teiloro teoremos atvejis. Tarę, kad egzistuoja trečioji funkcijos *f* išvestinė ir pakartoję analogiškus samprotavimus kaip dalyje 8.2, gautume, kad

$$r_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3.$$

Jei tartume, kad egzistuoja $(n+1)$ -oji išvestinė taško x_0 aplinkoje, tai gautume

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x), \tag{8.10}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{8.11}$$

Polinomas formulėje (8.10) vadinamas *n*-tuoju Teiloro polinomu, liekamasis narys (8.11) vadinamas Lagranžo formos liekamuoju nariu. Įrodyti siūlau pabandyti patiems arba paskaityti V.Kabailos vadovėlyje.

Jei egzistuoja tik n-toji išvestinė ir ji tolydi taške x_0, tai iš Lagranžo formos liekamojo nario r_{n-1} išraiškos gautume

$$\begin{aligned} r_{n-1}(x) &= \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)+o(1)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{o(1)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), x \to x_0. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Tada formulė (8.10) virsta

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_{n-1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), x \to x_0. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Čia liekamasis narys $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$ yra Peano formos.

8.5. Pastaba. Teiloras gyveno daug anksčiau už Lagranžą ir Peano, taigi jis nežinojo tokių liekamųjų narių išraiškų. Teiloras 1715 m. išleido knygą "*Methodus incrementorum directa it inversa*", kuriame išvystė baigtinių skirtumų skaičiavimo metodą. Toje knygoje jis parašė polinomus ir eilutes, kurie dabar vadinami Teiloro vardu. Teiloro teorema buvo neįvertinta iki 1772 m., kol Lagranžas nepareiškė, kad tai vienas iš fundamentaliausių diferencialinio skaičiavimo principų. Jis reiškia, kad funkciją taško aplinkoje galima aproksimuoti polinomais, kurie išreiškiami funkcijos ir jos išvestinėmis taške. Kuo daugiau išvestinių turime, tuo tiksliau galime aproksimuoti funkciją. Fizikoje dažniausiai apsiribojama Teiloro polinomais su antrosiomis išvestinėmis.

8.6. Pavyzdys f(x) = exp(x). Žinome, kad $\exp'(x) = \left(e^x\right)' = e^x$. Taigi $\left(e^x\right)'' = \left(\left(e^x\right)'\right)' = \left(e^x\right)' = e^x$ ir $\left(e^x\right)^{(n)} = \left(\left(e^x\right)^{(n-1)}\right)' = \left(e^x\right)' = e^x$. Galime parašyti Teiloro formulę taško $x_0 = 0$ aplinkoje. Beje, $\left.\left(e^x\right)^{(n)}\right|_{x=0} = \left.e^x\right|_{x=0} = 1$.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}x^k + r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + r_n(x), \tag{8.14}$$

$$r_n(x) = \frac{\exp^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{8.15}$$

čia ξ yra tarp nulio ir x. Įvertinsime liekamąjį narį

$$\left|r_n(x)\right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \le \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}. \tag{8.16}$$

Iš sekos $a_n = \dfrac{\left|x^n\right|}{n!}$ rekurentinės išraiškos

$$a_{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^n}{n!}\cdot\frac{|x|}{n+1} = a_n\frac{|x|}{n+1} \tag{8.17}$$

matyti, kad seka mažėjanti, kai $n+1>|x|$. Be to, seka $\{a_n\}$ aprėžta iš apačios nuliu. Taigi egzistuoja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Pereikime prie ribos rekurentinėje lygybėje (8.17)

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n \frac{|x|}{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1},$$

$$a = a\cdot 0,$$

$$a = 0.$$

Iš įverčio (8.16) išplaukia, kad $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ kiekvienam *x*. Lygybėje (8.14) galime pereiti prie ribos, kai $n\to\infty$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k + \lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k\ . \tag{8.18}$$

Pastaroji eilutė vadinama funkcijos e^x Teiloro eilute. Prisiminkime, kad eksponentinę funkciją apibrėžėme kaip ribą

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

ir lygybę (8.18) buvome įrodę tiesiogiai. Dabar ją išvedėme kaip didelės teorijos atskirą atvejį.

8.7. Pakankamos ekstremumų sąlygos. Jei funkcija diferencijuojama ir kažkokiame taške įgyja ekstremumą (maksimumą ar minimumą), tai Ferma teorema tvirtina, kad išvestinė tame taške turi būti lygi nuliui. Tai būtinoji ekstremumo sąlyga. Taškai, kuriuose išvestinė lygi nuliui, vadinami stacionariaisiais taškais. Išvestinės ženklas parodo funkcijos didėjimą ar mažėjimą. To dažniausiai pakanka nustatyti maksimumo ar minimumo taškus. Tačiau matematinės analizės tekstuose yra įprasta pakankamas ekstremumų sąlygas nusakyti ir antrosiomis išvestinėmis.

Sakykime, funkcija *f* yra dukart diferencijuojama, $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$. Pasirašome Teiloro formulę (8.9)

$$f(x)-f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2), x\to x_0. \tag{8.19}$$

Pirmasis dėmuo dešiniojoje lygybės (8.14) pusėje yra neigiamas, antrasis artėja į nulį greičiau už pirmąjį, todėl mažoje taško x_0 aplinkoje viską lemia pirmasis narys. Vadinasi, dešinioji pusė bus neigiama, o tai ekvivalentiška, kad $f(x)<f(x_0)$. Taigi taškas x_0 yra lokalaus maksimumo taškas.

Dabar samprotaukime griežtai (gal, formaliai?). Iš *o* mažiuko apibrėžimo išplaukia, kad pasirinkę bet kokį teigiamą ε, galime rasti tokį teigiamą δ, jog

$$\frac{\left|o((x-x_0)^2)\right|}{(x-x_0)^2} < \varepsilon, \tag{8.20}$$

kai $|x-x_0|<\delta$. Paimkime $\varepsilon = \frac{1}{4}\left|f''(x_0)\right|$. Tada iš (8.20) ir (8.19) išplaukia

$$\left|o((x-x_0)^2)\right| < \frac{1}{4}\left|f''(x_0)\right|(x-x_0)^2,$$

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(x_0) &= \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2) \\
&< \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{|f''(x_0)|}{4}(x-x_0)^2 \\
&= \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2-\frac{f''(x_0)}{4}(x-x_0)^2 \\
&= \frac{f''(x_0)}{4}(x-x_0)^2<0,
\end{aligned}
$$

kai $|x-x_0|<\delta$. Jei būtų $f'(x_0)=0$ ir $f''(x_0)>0$, tai analogiškai gautume, kad taškas x_0 yra lokalaus minimumo taškas. Galime suformuluoti įrodytą teoremą.

Teorema. *Sakykime, funkcija f yra dukart diferencijuojama ir* $f'(x_0)=0$.
Jei $f''(x_0)<0$*, tai taškas* x_0 *yra lokalaus maksimumo taškas, jei* $f''(x_0)>0$*, tai taškas* x_0 *yra lokalus minimumo taškas.*

Jei $f''(x_0)=0$, tai reikėtų skaičiuoti išvestines, kol gautume išvestinę nelygią nuliui, t.y. $f^{(k)}(x_0)=0, k=1,2,...,n-1$, bet $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, ir taikyti Teiloro formulę

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \\
&= f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n), x\to x_0.
\end{aligned}
\tag{8.21}
$$

Jei n – lyginis, tai atsakymas analogiškas kaip išnagrinėtu atveju $(n=2)$, jei n - nelyginis, tai ekstremumų nėra. Formalius įrodymus galima pasiskaityti minėtame V.Kabailos vadovėlyje. Tačiau, kaip minėjau anksčiau, aukštesnių eilių išvestinių skaičiuoti dažniausiai nereikia, nes ekstremumų pobūdį galima nusakyti iš pirmosios išvestinės ženklo.

Panagrinėkime paprasčiausią atvejį $f(x)=x^3$. Išvestinė $f'(x)=3x^2$ ir antroji išvestinė $f''(x)=6x$ lygi nuliui taške $x=0$, bet $f'''(x)=6$ nelygi nuliui. Pirmoji išvestinė teigiama, kai $x<0$ ir $x>0$. Vadinasi, funkcija visą laiką didėja ir ekstremumo nėra.