

Rinktinių matematinės analizės skyrių egzaminas
2005.06.04

Atidžiai skaitykite sąlygas. Sprendimuose aiškiai atskirkite uždavinius ir jų dalis. Atskirkite juodraštį nuo švarraščio.

1. Nagrinėkime sistemą $x' = rx - x^2$.
 - a) Nubrėžkite tris charakteringas vektorinio lauko diagramas (x, x') sistemoje. Suraskite ir įvardinkite pusiausvyros taškus skirtingoms parametro r reikšmėms. Įvardinkite bifurkacijos rūši. [4]
 - b) Parametro reikšmėms $r < 0, r = 0$ ir $r > 0$ išspręskite Koši uždavinį imdami atitinkamas pradinės reikšmes: $x_0 < 0, x_0 > 0, x_0 > r$. Kiekvienu atveju raskite ribas $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ ir nubrėžkite funkcijos $x = x(t), t \geq 0$ grafiko eskizą. [po 3]

2. Ar gali priešingybės įsimylėti vienas kitą? Panagrinėkime sistemą $R' = aR + aD, D' = -aR - aD, a > 0$. Kad būtų įprasti žymėjimai, pakeiskime $R = x, D = y$.
 - a) Sudėkite sistemos $\begin{cases} x' = ax + ay, \\ y' = -ax - ay \end{cases}$ lygtis ir suraskite sistemos integralą. Nubrėžkite sistemos fazinį portretą. [2]
 - b) Pažymėkime $A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}$. Suraskite matricą D , suvedančią matricą A į kanoninę Žordano formą $J = D^{-1}AD, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. [3]
 - c) Įrodykite bendrą matricos suvedimo į kanoninę Žordano formą teoremą, kai tikrinė šaknis yra kartotinė, o tikrinių vektorių erdvės dimensija - vienas. [4]
 - d) Pažymėję $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, z = Dw$, gaukite sistemą $w' = Jw$ ir ją išspręskite su pradinėmis sąlygom $u(0) = u_0, v(0) = v_0$. [2]
 - e) Nubrėžkite sistemos iš (d) dalies fazinę diagramą $(u; v)$ koordinačių sistemoje. Įvardinkite pusiausvyros taškus. [2]
 - f) Nubrėžkite sistemos fazinę diagramą x, y koordinačių sistemoje. Interpretuokite ją R, D terminais. [2]

3.
 - a) Naudodami Laplaso transformaciją suraskite lygčių sistemos $\begin{cases} x' = ax + ay, \\ y' = -ax - ay \end{cases}$ su pradinėmis sąlygomis $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ sprendinius. [4]
 - b) Nubrėžkite sistemos fazinę diagramą, naudodami sprendinius, gautus dalyje (a). [1]

- c) Palyginkite tris metodus, naudotus sprendžiant lygčių sistemą ir piešiant sistemos fazinę diagramą. [3]

4. Nagrinėkime sistemą $\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = -bx - ay, \end{cases} 0 < b < a.$

- a) Suraskite lygčių sistemos Koši uždavinio ($x(0) = x_0, y(0) = y_0$) sprendinių Laplaso transformacijas. [4]
- b) Užrašykite atvirkštinių Laplaso transformacijų formules. Paaiškinkite reziduų naudojimo schemą skaičiuojant atvirkštinę Laplaso transformaciją (integralų nevertinkite). Suraskite funkcijas $x = x(t)$ ir $y = y(t)$. [5]
- c) Patikrinkite, ar surasti sprendiniai tenkina lygčių sistemą. [2]
- d) Įvardinkite (formaliai) sistemos pusiausvyros tašką. [1]
- e) Jei sprendiniai surasti teisingai, tai ištyrinkite sprendinio $(x(t), y(t))$ asimptotinę elgesį, kai $t \rightarrow +\infty$. (raskite asimptotes neieškodami tikrinių vektorių). Iš surastų sprendinio išraiškų turi būti matyti, kokius atvejus reikia nagrinėti. Jei nepatinka a ir b sprendinių išraiškose, galite imti $a = 5, b = 3$ (už nedidelę kainą). [6]

Pastaba. Kaip įprasta, uždavinių vertinimai gali būti kartais pakoreguoti.

Paruošė R.Kudžma