Kompleksinio kintamojo kontrolinis
2005.04.09

Atidžiai skaitykite sąlygas. Sprendimuose aiškiai atskirkite uždavinius ir jų dalis. Atskirkite juodraštį nuo švarraščio.

1.

a) Išskaidykime funkciją $w = f(z) = z^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}\ln z}$ į kompoziciją funkcijų

$\alpha + i\beta = \xi = \ln(z)$, $s + it = \eta = \dfrac{1}{4}\xi$, $u + iv = w = e^{\eta} = \exp(\eta)$.

Parametrizuokite srities $D_z = \{z; 0 < |z| < R, \arg z \in (0;\pi)\}$, $R > 1$, krašto dalis ir raskite jų vaizdus. Nupieškite srities D_z vaizdą D_ξ. Nupieškite kitus sričių vaizdus D_η, D_w (kraštų daugiau nebeparametrizuokite, tik sunumeruokite ir parodykite kryptis). (4)

b) Sakykime, kompleksinė funkcija išreikšta polinėmis koordinatėmis $f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$. Išveskite jai Koši-Rymano sąlygas
$\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}$, $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial v}{\partial r}$.
(darykime prielaidą, kad galioja įprastos Koši-Rymano sąlygos) (4)

c) Funkcijai $w = f(z) = z^a = e^{a\ln z}$, a – realus, patikrinkite Koši-Rymano sąlygas, išvestas dalyje (b). (2)

d) Raskite funkcijos $w = z^a$ išvestinę, pasinaudoję pereitos dalies rezultatais. (3)

2. Šio uždavinio visose dalyse $a \in (-1;1)$.

a) Įrodykite, kad integralas $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^a}{1+x^2}dx$ konverguoja, kai $-1 < a < 1$. (2)

b) Įrodykite, kad $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_\gamma \dfrac{z^a}{1+z^2}dz = 0$, čia $\gamma(\varphi) = R\mathrm{e}^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le \pi$. (1)

c) Įrodykite, kad $\lim\limits_{r\to 0} \int\limits_\gamma \dfrac{z^a}{1+z^2}dz = 0$, čia $\gamma(\varphi) = re^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le \pi$. (1)

d) Apskaičiuokite funkcijos $f(z) = \dfrac{z^a}{1+z^2}$ reziduumą taške $z = i$. (1)

e) Apskaičiuokite integralą $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^a}{1+x^2}dx$. (4)

3.

a) Suformuluokite Puankare teoremą dvimačiu atveju. (1)

b) Įrodykite Puankare teoremą. Tikrinkite dalinę išvestinę **pagal *y***. (3)

4. Nagrinėsime funkcijas $F(z)=\dfrac{e^{-az}}{z+b}, a>0, b>0$ ir $g(z)=e^{tz}f(z)=\dfrac{e^{(t-a)z}}{z+b}$.
   a) Suraskite, kokioje pusplokštumėje funkcija $F(z)$ tenkina sąlygas teoremos apie atvirkšinę Laplasą transformaciją. (2)
   b) Apibrėžkime du kelius
   $$\gamma_1(\varphi)=c+R\cdot e^{i\varphi}, -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},$$
   $$\gamma_2(\varphi)=c+R\cdot e^{i\varphi}, \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}.$$
   Raskite sąlygas, kada
   $$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_k}\frac{e^{(t-a)z}}{z+b}dz=0, k=1,2.$$ (4)
   c) Raskite funkcijos $F(z)$ atvirkštinę Laplaso transformaciją $f(t)$ ir nubrėžkite jos grafiko eskizą. (3)

5.
   a) Nubrėžkite kreives $|\mathrm{Re}\, z|+|\mathrm{Im}\, z|=1$ ir $|z|=1$. (1)
   b) Parametrizuokite jas parametru $t, 0\le t\le 1$, taip, kad abiejų pradžios ir pabaigos taškas būtų $z=1$ ir kad kreivėmis eitume pagal laikrodžio rodyklę. (3)
   c) Parašykite homotopijos funkciją tiems uždariems keliams srityje $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Pavaizduokite geometriškai kreives $h(s,1/8)$ ir $h(s,1/2)$, $0\le s\le 1$. (3)
   d) Nurodykite bent vieną sritį, kurioje keliai nėra homotopiški. (1)

6. Skirtingais būdais apskaičiuokite (išsamiai paaiškindami) integralą
   $$\int_\gamma\frac{dz}{(z^2-1)(z^2+1)}, \gamma(t)=1+e^{it}, 0\le t\le 2\pi.$$ (po 2)

7. Sakykime, taškas a – funkcijos $f(z)$ pirmos eilės polius. Trimis skirtingais būdais apibrėžkite funkcijos reziduumą taške a. (3)

Pastaba. Tikrinant sprendimų vertinimas gali būti kartais pakoreguotas.

Paruošė R.Kudžma