Rinktinių matematinės analizės skyrių egzaminas
2005.01.07

Atidžiai skaitykite sąlygas. Sprendimuose aiškiai atskirkite uždavinius ir jų dalis. Atskirkite juodraštį nuo švarraščio.

1. Duota funkcija $f(x) = \begin{cases} 1, 0 \le x \le 1, \\ \dfrac{1}{x^2}, 1 < x. \end{cases}$
   a) Apibrėžkite funkcijų klasę $L_0[0,+\infty)$. (1)
   b) Sukonstruokite didėjančių laiptinių funkcijų seką $\{\varphi_n\}$, konverguojančią kiekviename taške į funkciją f. (4)
   c) Pavaizduokite geometriškai dvi pirmąsias dalies (b) funkcijas, turinčias ne mažiau kaip dvi nenulines reikšmes. (Kiekvienai funkcijai – atskiras brėžinukas.) (2)
   d) Įrodykite, kad funkcija f priklauso klasei $L_0[0,+\infty)$. (3)

2. Kintamųjų keitimas nusakytas funkcijomis
   $(x;y) = g(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v)) = (g_1(u,v), v)$, $(u;v) \in [\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta] = D$,
   $\dfrac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) > 0$, $(u,v) \in D$.
   a) Pavaizduokite sritį $G = g(D)$ plokštumoje x, y. Kam reikalinga sąlyga $\dfrac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) > 0$? (3)
   b) Įrodykite kintamųjų keitimo teoremą šiuo atveju
   $$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(g(u,v))\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,dudv. \quad (5)$$

3. Duotas kartotinis integralas $I = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz$.
   a) Nupieškite integravimo sritį x, y plokšumoje ir užrašykite rėžius integrale $I = \int dy \int dx \int z^2 dz$. (1)
   b) Nupieškite integravimo sritį x, z plokštumoje ir užrašykite rėžius integrale(uose) $I = \int dx \int dz \int z^2 dy$. (3)
   c) Užrašykite trimates polines koordinates $(x,y,z) = \vec{w} = \vec{w}(r,\theta,\varphi)$.
   Apskaičiuokite vektorius $\xi = \dfrac{\partial \vec{w}}{\partial r}, \eta = \dfrac{\partial \vec{w}}{\partial \theta}, \tau = \dfrac{\partial \vec{w}}{\partial \varphi}$. Pavaizduokite šiuos vektorius geometriškai, įrodykite, kad jie ortogonalūs ir raskite tūrį lygiagretainio gretasienio, sudaryto iš šių vektorių. (3)
   d) Apskaičiuokite integralą I naudodami trimates polines koordinates. (2)

4. Suformuluokite nulinio mato aibės apibrėžimą plokštumoje. Juo naudodamiesi įrodykite, kad tiesė $l = \{(x;0), x \in \mathbf{R}\}$ yra nulinio plokščio mato. (3)

5. Sakykime, funkcija $f : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ yra diferencijuojama taške a. Įrodykite ($\varepsilon - \delta$ kalba), kad funkcija f tolydi taške a. (3)

6. Ieškosime funkcijos $f(x, y) = 4x^2 + 24xy + 11y^2$ (kvadratinės formos) ekstremumų su sąlyga $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.
   a) Išspręskite (pilnai) uždavinį naudodami Lagranžo funkciją $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda F(x, y)$. (6)
   b) Nubrėžkite funkcijos $f(x, y) = 4x^2 + 24xy + 11y^2$ portretą. (Separatrisė – dvi tiesės. Jas būtina rasti.) (4)
   c) Apskaičiuokite funkcijos f lygio linijų antrąsias išvestines neišreikštine forma. Ištirkite lygio linijų iškilumą. (2)
   d) Ant funkcijos f portreto paaiškinkite dalies (a) sprendinius. (2)
   e) Pakeiskite funkcijos f kintamuosius $x = x_1u + x_2v$, $y = y_1u + y_2v$, čia $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ yra dalies (a) sprendiniai, atitinkantys skirtingus λ. (2)

7. Duota diferencialinių lygčių sistema
$$\begin{cases} x'(t) = -12x - 11y, x(0) = x_0, \\ y'(t) = 4x + 12y, y(0) = y_0. \end{cases}$$
   a) Išspręskite šią sistemą naudodami Laplaso transformaciją. Sprendinį patikrinkite. (5)
   b) Apskaičiuokite $g(t) = 4x^2(t) + 24x(t)y(t) + 11y^2(t)$, kai $y_0 = 0$. (2)
   c) Susiekite dalyje (b) gautą rezultatą su (6) užduotyje nupieštu funkcijos portretu (portreto eskizą perpieškite). (1)
   d) Skaičiuoti tiesiogiai funkciją $g(t)$ su bet kokiomis pradinėmis reikšmėmis – beviltiškas užsiėmimas. Kaip galima racionaliau tai padaryti? (3)
   e) Paaiškinkite, kodėl su bet kokiomis pradinėmis sąlygomis dalyje (b) turėtume gauti (arba gavote dalyje (d)) $g(t) = 4x_0^2 + 24x_0y_0 + 11y_0^2$? (3)
   f) Ištirkite sistemos $(x(t), y(t))$ elgesį, kai $t \to +\infty$, jei pradinės sąlygos tenkina sąryšius $2x_0 + y_0 = 0$ arba $2x_0 + 11y_0 = 0$. Pavaizduokite tai portrete. (3)

Paruošė R.Kudžma