Matematinės analizės kontrolinis darbas
2004.11.13

5. *Ieškosime funkcijos* $f(x,y)=3x^2+2xy+3y^2$ *(kvadratinės formos) ekstremumų su sąlyga* $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$.

a) *Išspręskite (pilnai) uždavinį naudodami Lagranžo funkciją*
$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda F(x,y). \tag{5}$$

Parašome Lagranžo funkciją ir apskaičiuojame jos dalines išvestines:

$$L(x,y,\lambda)=3x^2+2xy+3y^2-\lambda(x^2+y^2-1),$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=6x+2y-2\lambda x=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2x+6y-2\lambda y=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1=0.\end{cases} \tag{1}$$

Dvi pirmąsias lygtis suprastinkime iš 2:

$$\begin{cases}3x+y-\lambda x=0,\\ x+3y-\lambda y=0.\end{cases} \tag{2}$$

Šią sistemą galime parašyti, kaip

$$Az=\lambda z, \tag{3}$$

čia $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $z=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. Sistemos (3) sprendinys z vadinamas matricos A tikriniu vektoriumi, o λ - tikrine reikšme. Sistema turi netrivialų sprendinį tada ir tik tada, kai

$$\det(A-\lambda E)=0,$$

čia E – vienetinė matrica.

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(3-\lambda)^2-1=(\lambda-3-1)(\lambda-3+1)=(\lambda-4)(\lambda-2)=0$$

Šaknys $\lambda_1=4,\lambda_2=2$ - tikrinės matricos A reikšmės. Iš (2) lygčių sistemos gauname sąlygą $y=x$, kai $\lambda=4$ ir $y=-x$, kai $\lambda=2$. Vektorių, tenkinančių šias sąlygas ir trečiąją (1) sistemos lygtį, yra keturi

$$\lambda_1=4, z_1=(x_1,y_1)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), z_3=(x_3,y_3)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$
$$\lambda_2=2, z_2=(x_2,y_2)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), z_4=(x_4,y_4)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Skaičiuojame antrąsias išvestines:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=6-2\lambda, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=6-2\lambda, \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=2.$$

Kvadratinę formą

$$D^2_{xy}L\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},4\right)(h,k)=-2h^2+4hk-2k^2 \tag{4}$$

tiriame poerdvyje

$$\langle \operatorname{grad} F, \tau \rangle = 0, \tag{5}$$

čia $\operatorname{grad} F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(2\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\tau = (h,k)$. Tada iš (5) lygties gauname $k = -h$ ir (4) kvadratinė forma

$$D_{xy}^2 L\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 4\right)(h,-h) = -2h^2 + 4h(-h) - 2(-h)^2 = -8h^2$$

yra neigiamai apibrėžta. Taškas $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ yra lokalaus sąlyginio maksimumo taškas. Analogiškai gautume, kad $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ taip pat yra lokalaus sąlyginio maksimumo taškas.

Kitame taške $(x_2, y_2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ iš sąlygos (5) gauname $k = h$. Todėl

$$D_{xy}^2 L\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)(h,h) = 2h^2 + 4hh + 2h^2 = 8h^2.$$

Kvadratinė forma teigiamai apibrėžta, taškas $(x_2, y_2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ - lokalaus sąlyginio minimumo taškas. Visiškai analogiškai gautume, kad taškas $(x_4, y_4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ taip pat yra lokalaus sąlyginio minimumo taškas.

b) *Nubrėžkite funkcijos* $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ *portretą.* (3)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 2y, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 6y,$$

$$H: 6x + 2y = 0, y = -3x,$$

$$V: 2x + 6y = 0, y = -\frac{1}{3}x,$$

$$g(x,y) = y_x'(x) = -\frac{6x+2y}{2x+6y} = -\frac{3x+y}{x+3y},$$

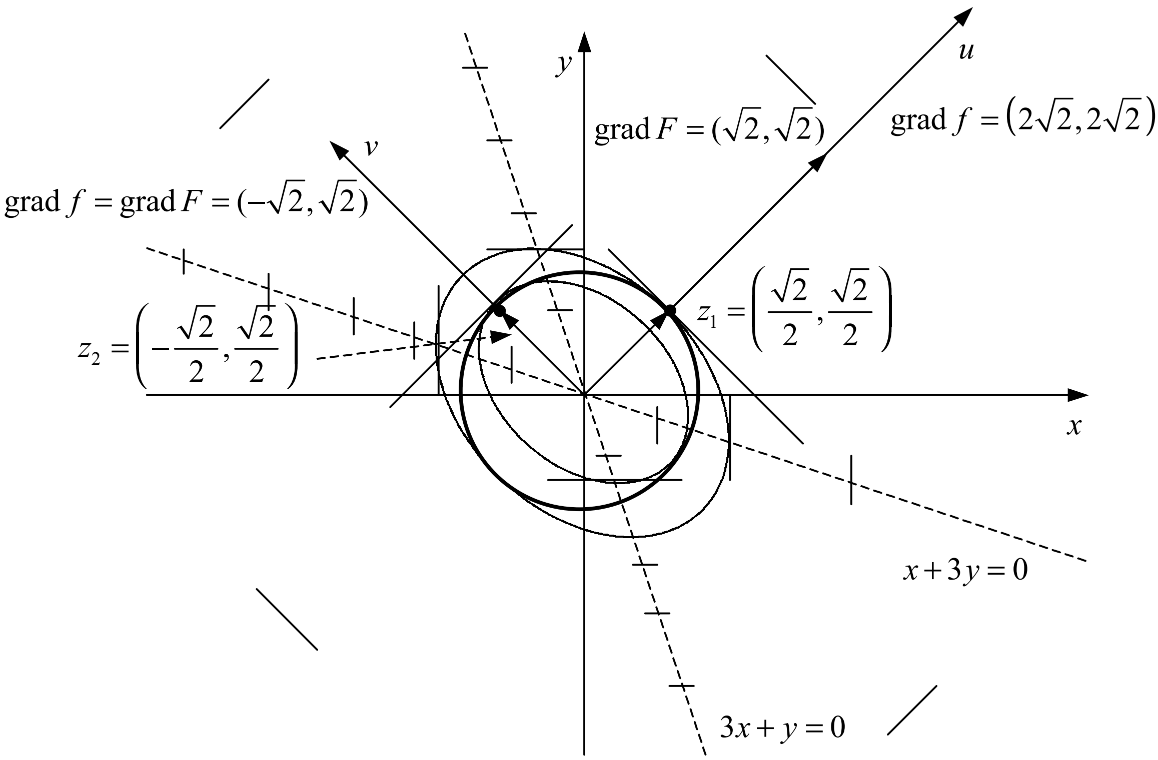
$$g(1,1) = -\frac{3+1}{1+3} = -1,$$

$$H \cap V: \begin{cases} 6x + 2y = 0, \\ 2x + 6y = 0, \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2,$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 4 = 32 > 0, 6 > 0.$$

Kvadratinė forma teigiamai apibrėžta. Taškas $(0;0)$ - lokalaus minimumo taškas. Galime brėžti funkcijos portretą.



c) *Apskaičiuokite funkcijos f lygio linijų antrąsias išvestines neišreikštine forma. Ištirkite lygio linijų iškilumą.* (3)

$$
\begin{aligned}
y''_{xx}(x) &= \frac{d}{dx}\left(y'_x(x)\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{3x+y}{x+3y}\right) \\
&= -\frac{(3+y')(x+3y)-(3x+y)(1+3y')}{(x+3y)^2} \\
&= -\frac{3x+9y+xy'+3yy'-3x-9xy'-y-3yy'}{(x+3y)^2} \\
&= -\frac{8(y-xy')}{(x+3y)^2} \\
&= -\frac{8(y+x\frac{3x+y}{x+3y})}{(x+3y)^2} \\
&= -\frac{8(3x^2+2xy+3y^2)}{(x+3y)^3}
\end{aligned}
$$

Petvarkykime gautos išvestinės skaitiklį:

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) + (2x^2 + 2y^2) = (x + y)^2 + 2(x^2 + y^2). \qquad (6)$$

Gautasis reiškinys (6) visada neneigiamas. Antroji išvestinė teigiama, kai $x + 3y < 0$ ir neigiama, kai $x + 3y > 0$. Žemiau vetikaliosios daugdaros lygio linijos iškilos, virš – išgaubtos.

d) *Pakeiskite funkcijos f kintamuosius $x = x_1 u + x_2 v$, $y = y_1 u + y_2 v$, čia $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ yra dalies (a) sprendiniai, atitinkantys skirtingus λ.* (2)

Paimkime

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \lambda_1 = 4,$$

$$(x_2, y_2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \lambda_2 = 2.$$

Tada

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v, y = \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(u,v) &= f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v, \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v\right) \\
&= 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v\right) + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v\right)^2 \\
&= 3\left(\frac{1}{2}u^2 - uv + \frac{1}{2}v^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2\right) + 3\left(\frac{1}{2}u^2 + uv + \frac{1}{2}v^2\right) \\
&= 4u^2 + 2v^2
\end{aligned}$$

Vadinasi, lygio linijos $f(x,y) = \tilde{f}(u,v) = C$ yra elipsės.

e) *Ant funkcijos f portreto paaiškinkite dalies (a) sprendinius.* (2)

Tirsime lygio linijas, einančias per sąlyginių ekstremumų taškus.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tilde{f}(1,0) = 4, \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tilde{f}(-1,0) = 4.$$

Parašome lygtį funkcijos f lygio linijos, einančios per taškus $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ir $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, senosiose koordinatėse

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$$

ir naujosiose koordinatėse

$$4u^2 + 2v^2 = 4,$$

$$u^2 + \frac{v^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1.$$

Tai elipsė, kurios pusašės 1 (u ašyje) ir $\sqrt{2}$ (v ašyje). Randame funkcijų gradientus taške z_1

$$\operatorname{grad} F(x,y) = (2x, 2y); \operatorname{grad} F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right),$$

$$\operatorname{grad} f(x,y)=(3x+y,x+3y), \operatorname{grad} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=(2\sqrt{2},2\sqrt{2}).$$

Funkcijų f ir F gradientai lygiagretūs. Elipsė ir apskritimas turi bendrą liestinę. Tirsime lygio liniją, einačią per kitus du sąlyginio ekstremumo taškus.

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\tilde{f}(0,1)=2,\quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\tilde{f}(0,-1)=2.$$

Funkcijos f lygio linijos, einančios per taškus $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ir $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, lygtis naujose koordinatėse yra

$$4u^2+2v^2=2,$$

$$\frac{u^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{v^2}{1}=1.$$

Tai elipsė, kurios pusašės $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (u ašyje) ir 1 (v ašyje). Apskaičiuojame funkcijų gradientus taške $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$\operatorname{grad} F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right),$$

$$\operatorname{grad} f(x,y)=(3x+y,x+3y), \operatorname{grad} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

Funkcijų f ir F gradientai lygiagretūs (net lygūs). Elipsės ir apskritimo liestinės taške z_2 sutampa.

f) *Pateikite uždavinio trimatę interpretaciją (trimatį brėžinį).* (2)

Kol kas “pas”. Galbūt, kitąmet.

6. *Suformuluokite ir išveskite analiziškai funkcijos $f(x;y)$ su apribojimu $F(x;y)=0$ būtinas ekstremumų sąlygas (Lagranžo daugiklių metodą).* (4)

Sakykime,

$$F(x_0,y_0)=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0, \tag{7}$$

$$f(x_0,y_0)\le f(x,y),$$

kai (x,y) yra iš tam tikros taško (x_0,y_0) aplinkos ir $F(x,y)=0$. Jei laikysime, kad funkcija F yra tolydžiai diferencijuojama, tai (7) sąlygos leidžia taikyti neišreikštinės funkcijos teoremą. Tada egzistuoja taško x_0 aplinka U ir joje apibrėžta vienintelė funkcija $y=y(x)$, tenkinati sąlygas:

$$y(x_0)=y_0,\ F(x,y(x))=0, x\in U,$$

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}, \quad y = y(x).$$

Tada vieno argumento funkcija $g(x) = f(x, y(x))$ taške x_0 turi lokalų minimumą. Jei funkcija f diferencijuojama, tai

$$g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y'(x_0)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} \right)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0. \tag{8}$$

Pažymėkime

$$\lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}. \tag{9}$$

Beje, λ galima apibrėžti ir be minuso ženklo kaip ankstesniame uždavinyje. Tada (8) lygtis tampa

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,$$

o (9) sąryšis

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Pridėję sąryšį $F(x_0, y_0) = 0$, gauname būtinąsias sąlyginio ekstremumo sąlygas – tris lygtis su trimis nežinomaisiais. Jei apibrėšime Lagranžo funkciją

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y),$$

tai tas lygtis galėsime užrašyti taip:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0, \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0.$$