

**Matematinės analizės kontrolinis darbas**  
**2004.11.13**

1. Duota funkcija  $F(x, y) = \frac{2}{3}x^3 + 2xy^2 + x^2 + y^2$ .
  - a) Suraskite, nubrėžkite ir tiksliai įvardinkite horizontaliąją ir vertikaliąją daugdaras. Nustatykite lygio linijų mažėjimo ir didėjimo sritis. (3)
  - b) Suraskite ypatinguosius taškus. Išaiškinkite jų pobūdį. (3)
  - c) Įrodykite geometriškai (nesprendę jokių lygčių), kokie negali ir kokie turi būti separatrinės krypties vektoriai balno taške (viename). (2)
  - d) Išveskite (c) dalies rezultatą analiziškai. (1)
  - e) Nubrėžkite separatrinę (galima iš pradžių padaryti (f) dalį). (2)
  - f) Išskaidykite separatrinės lygtį. Išstirkite jos dalis. (2)
  - g) Nubrėžkite kitas lygio linijas. (1)
  - h) Parašykite funkcijos  $F$  Teiloro formulę ypatingųjų (ne balno) taškų aplinkose iki antrojo laipsnio narių (žymėkite  $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$ ).  
Į kokius paviršius panašus funkcijos  $z = F(x, y)$  grafikas tų taškų aplinkose? (4)
2. Įrodykite, kad plokštumos aibė  $F = \{(x, y); x \in [0, 1], y = 0\}$  yra uždara aibė,
  - a) naudodamiesi apibrėžimu apie papildinį  $F^C$ ; (2)
  - b) naudodamiesi kita uždaros aibės charakterizacija. (2)
3. Nupieškite aibę  $K = \{(x, y); x \in [0, 1], y = x, \}$ . Įrodykite pagal apibrėžimą, kad ji kompaktiška. (3)
4. Sakykime,  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  tolydžiai diferencijuojama funkcija ir  $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ .
  - a) Įrodykite, kad grad  $f(x_0, y_0, z_0)$  statmenas lygio paviršiui  $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$ , t.y jo liečiamajai plokštumai. (4)
  - b) Nupieškite paveikslą, vaizduojantį lygio paviršiaus pjūvį per tašką  $(x_0; y_0; z_0)$  plokštuma, lygiagrečia  $y, z$  plokštumai. (2)
5. Ieškosime funkcijos  $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$  (kvadratinės formos) ekstremumų su sąlyga  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ .
  - a) Išspręskite (pilnai) uždavinį naudodami Lagranžo funkciją  $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda F(x, y)$ . (5)
  - b) Nubrėžkite funkcijos  $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$  portretą. (3)
  - c) Apskaičiuokite funkcijos  $f$  lygio linijų antrąsias išvestines neišreikštine forma. Išstirkite lygio linijų iškilumą. (3)
  - d) Ant funkcijos  $f$  portreto paaiškinkite dalies (a) sprendinius. (2)
  - e) Pakeiskite funkcijos  $f$  kintamuosius  $x = x_1u + x_2v$ ,  $y = y_1u + y_2v$ , čia  $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$  yra dalies (a) sprendiniai, atitinkantys skirtingus  $\lambda$ . (2)
  - f) Pateikite uždavinio trimatę interpretaciją (trimatį brėžinį). (2)
6. Suformuluokite ir išveskite analiziškai funkcijos  $f(x, y)$  su apribojimu  $F(x, y) = 0$  būtinas ekstremumų sąlygas (Lagranžo daugiklių metodu). (4)