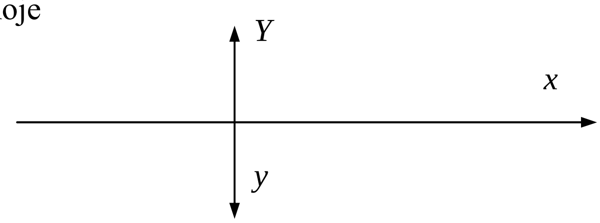
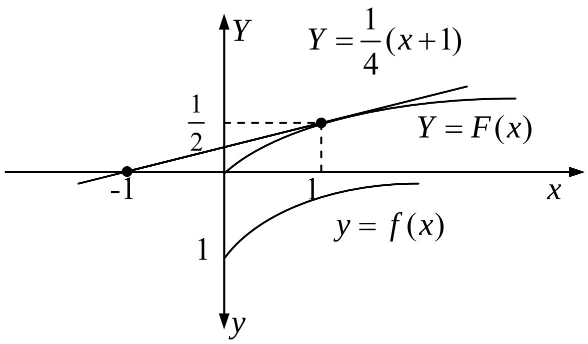
Matematinės analizės egzamino 2004.06.15
Užduočių sprendimai

1. Duotos funkcijos $f(x) = 1/(1+x)^2$ ir $F(x) = \int_0^x du/(1+u)^2$, $x \geq 0$.

   a) Nubrėžkite funkcijų $y = f(x)$ ir $Y = F(x)$ grafikų eskizus koordinačių sistemoje



$$F(x) = \int_0^x \frac{du}{(1+u)^2} = -\frac{1}{1+u}\Big|_0^x = -\frac{1}{1+x} + 1 = \frac{x}{1+x}.$$



(3)

   b) Ištirkite funkcijos $Y = F(x)$ iškilumą. (1)

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{(1+x)^2},\ F''(x) = f'(x) = -\frac{2}{(1+x)^3} < 0, x \geq 0.$$

Funkcija F išgaubta.

c) Nubrėžkite funkcijos $Y = F(x)$ grafiko liestinę taške $(1, F(1))$ ir raskite jos susikirtimo taško su x-sų ašimi koordinates. (1)

Liestinės lygtis

$Y = F(1) + F'(1)(x-1),$

$Y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-1) = \frac{1}{4}(x+1),$

$Y = 0, x = -1.$

2.

3.

   a) Išveskite rekurentinę formulę $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$, n – natūralusis skaičius. (3)

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \cos x dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x d\sin x$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x (n-1) \cos^{n-2} x (-\sin x) dx$$
$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^{n-2} x dx$$
$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, n \geq 2.$$

b) Apskaičiuokite I_n, naudodamiesi išvesta rekurentine formule. (2)

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2},$$
$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1,$$
$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$
$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} I_{2m-1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.$$

c) Apskaičiuokte I_n, naudodamiesi Euler'io integralais. (3)

Pakeiskime kintamuosius $\sin x = u, x = 0, u = 0, x = \frac{\pi}{2}, u = 1$,

$x = \arcsin u, dx = (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} du$, $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-u^2}$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n}{2}} (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} du$$
$$= \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} du.$$

Pakeiskime kintamuosius $u^2 = t, u = 0, t = 0, u = 1, t = 1$, $u = \sqrt{t}, du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$I_n = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^{\frac{n-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^{\frac{n+1}{2}-1} t^{\frac{1}{2}-1} dt$$
$$= \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

4.

5.

a) Parašykite, ką reiškia, kad funkcija $f(x)=1/(1+x)^2$ yra tolygiai tolydi intervale $[0,1]$. Įrodykite tai (pagal apibrėžimą). (3)

Funkcija $f(x)=1/(1+x)^2$ yra tolygiai tolydi intervale $[0,1]$, jei bet kokiam $\varepsilon, \varepsilon>0,$ galima rasti tokį $\delta=\delta(\varepsilon), \delta>0,$ kad

$$|x_1-x_2|<\delta, x_1, x_2\in[0,1]\Rightarrow\left|\frac{1}{(1+x_1)^2}-\frac{1}{(1+x_2)^2}\right|<\varepsilon.$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{(1+x_1)^2}-\frac{1}{(1+x_2)^2}\right|&=\left|\frac{(1+x_2)^2-(1+x_1)^2}{(1+x_1)^2(1+x_2)^2}\right|\\&=\left|\frac{2x_2+x_2^{\,2}-2x_1-x_1^{\,2}}{(1+x_1)^2(1+x_2)^2}\right|\\&\le\left|2(x_2-x_1)+(x_2-x_1)(x_2+x_1)\right|\\&=\left|(x_2-x_1)(2+x_2+x_1)\right|\\&\le 4|x_2-x_1|<\varepsilon.\end{aligned}$$

Pastaroji nelygybė galioja, kai $|x_2-x_1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$. Vadinasi, galime paimti $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$.

b) Ar funkcija $f(x)=1/(1+x)^2$ yra tolygiai tolydi intervale $[0,+\infty)$? Atsakymą pagrįskite. (2)

Taip.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(1+x)^2}=0$. Todėl bet kokiam $\varepsilon, \varepsilon>0,$ galima rasti tokį $\Delta, \Delta>0$, kad

$$x>\Delta\Rightarrow\frac{1}{(1+x)^2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Kantoro teorema tvirtina, kad tolydi funkcija $f(x)=1/(1+x)^2$ yra tolygiai tolydi intervale $[0,\Delta]$. Todėl galima rasti tokį $\delta=\delta(\varepsilon), \delta>0,$ kad

$$|x_1-x_2|<\delta, x_1, x_2\in[0,\Delta]\Rightarrow\left|\frac{1}{(1+x_1)^2}-\frac{1}{(1+x_2)^2}\right|<\varepsilon.$$

Jei $x_1>\Delta, x_2>\Delta$, tai

$$\left|\frac{1}{(1+x_1)^2}-\frac{1}{(1+x_2)^2}\right|<\frac{1}{(1+x_1)^2}+\frac{1}{(1+x_2)^2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

2. Galima taikyti Lagranžo teoremą: Bet kokiam intervalui $[x_1,x_2], 0\le x_1<x_2$, egzistuoja toks $c\in(x_1,x_2)$, kad

$$\left|\frac{1}{(1+x_1)^2}-\frac{1}{(1+x_2)^2}\right|=\left|\frac{-2}{(1+c)^3}\right|\cdot|x_2-x_1|,$$

$$\left|\frac{-2}{(1+c)^3}\right|<2, c>0.$$

Vadinasi,

$$\left|\frac{1}{(1+x_1)^2}-\frac{1}{(1+x_2)^2}\right|=2|x_2-x_1|<\varepsilon.$$

Galima paimti $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

6.

7. Duota eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n ne^{-nx}$.

a) Kokioms *x* reikšmėms ir kokį atsakymą galima pasakyti apie eilutės konvergavimą arba divergavimą, pritaikius eilučių konvergavimo požymius:

i) Dalambero, (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}(n+1)e^{-(n+1)x}\right|}{\left|(-1)^n ne^{-nx}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-x}}{n} = e^{-x},$$

$e^{-x} < 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Eilutė absoliučiai konverguoja, kai $x > 0$.

ii) Koši, (1)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^n ne^{-nx}\right|} = \lim_{n\to\infty} e^{-x}\sqrt[n]{n} = e^{-x}.$$

$e^{-x} < 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Eilutė absoliučiai konverguoja, kai $x > 0$.

iii) Leibnico, (3)

$$\lim_{n\to\infty} ne^{-nx} = \lim_{n\to\infty} n\left(e^{-x}\right)^n = 0,$$

kai $x > 0$.

$$\frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-x}} = \frac{n+1}{n}e^{-x} < 1,$$

$$1+\frac{1}{n} < e^x,$$

$$\frac{1}{n} < e^x - 1.$$

Jei $x > 0$, tai dešinioji paskutiniosios nelygybės pusė yra teigiama. Todėl egzistuos toks *N*, kad paskutinioji nelygybė bus teisinga, kai $n > N$. Taigi nuo šito *N* seka $a_n = ne^{-n}$ bus mažėjanti. Pagal Leibnico teoremą eilutė konverguoja.

b) Raskite eilutės tolygaus konvergavimo intervalą. (3)

$\left|(-1)^n ne^{-nx}\right| \le ne^{-na}$,

kai $x \ge a$. Kai $a > 0$, tai pagal Dalambero ar Koši požymį eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-na}$ konverguoja. Iš Vejerštraso teoremos išplaukia, kad eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n ne^{-nx}$ konverguoja tolygiai intervale $[a,+\infty), a > 0$.

c) Suintegruokite eilutę panariui ir raskite jos sumą. (4)

Eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n ne^{-nx}$ konverguoja tolygiai intervale $[a,b]$.Pažymėkime jos sumą $s(x)$. Galima eilutę integruoti panariui

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_a^b ne^{-nx}dx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (-e^{-nx})\Big|_a^b$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (-e^{-nb} + e^{-na})$$
$$= \frac{e^{-b}}{1+e^{-b}} - \frac{e^{-a}}{1+e^{-a}}$$
$$= 1 - \frac{1}{1+e^{-b}} - \frac{e^{-a}}{1+e^{-a}},$$
$$s(b) = \frac{d}{db}\int_a^b s(x)dx = -\frac{e^{-b}}{\left(1+e^{-b}\right)^2},$$
$$s(x) = -\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}.$$

d) Ar išdiferencijuotos panariui eilutės suma bus lygi eilutės sumos išvestinei? (4)

Kad būtų teisinga lygybė
$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(e^{-nx}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n^2 e^{-nx},$$
pakanka:

- Eilutė $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n ne^{-nx}$ konverguotų bent viename taške. Dalyje (a) įrodėme, kad ji konverguoja, kai $x > 0$ ir konverguoja tolygiai kiekviename intervale $[a,+\infty), a > 0$.
- Išdiferencijuota eilutė panariui $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n^2 e^{-nx}$ konverguotų tolygiai intervale $[a,+\infty), a > 0$.

Naudosimės Vejerštraso teorema apie funkcinių eilučių tolygųjį konvergavimą. Galime įvertinti
$$\left|(-1)^{n+1} n^2 e^{-nx}\right| \le n^2 e^{-na}, \text{ kai } x \ge a.$$

Eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-na}$ konverguoja, nes
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|n^2 e^{-na}\right|} = \lim_{n\to\infty} e^{-a}\sqrt[n]{n^2} = e^{-a} < 1,$$

kai $a > 0$. Vadinasi, eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n^2 e^{-nx}$ konverguoja tolygiai intervale $[a,+\infty), a > 0$.