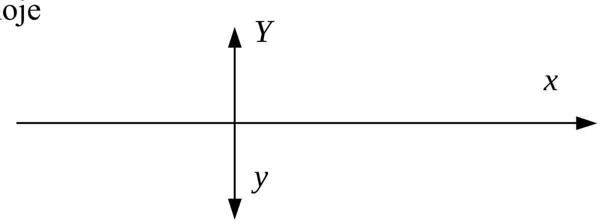
Matematinės analizės egzamino užduotys
2004.06.15

Nurodymai.

- **Atidžiai skaitykite sąlygas. Darykite tiksliai tai, ko reikajaujama.**
- **Švarraštis gali būti tik dešiniojoje sąsiuvinio pusėje (išskyrus paskutinį pusl.).**
- **Uždavinio numerį žymėkite puslapio kairiojoje pusėje didesniu šriftu.**

1. Duotos funkcijos $f(x)=1/(1+x)^2$ ir $F(x)=\int_0^x du/(1+u)^2$, $x\geq 0$.

   a) Nubrėžkite funkcijų $y=f(x)$ ir $Y=F(x)$ grafikų eskizus koordinačių sistemoje

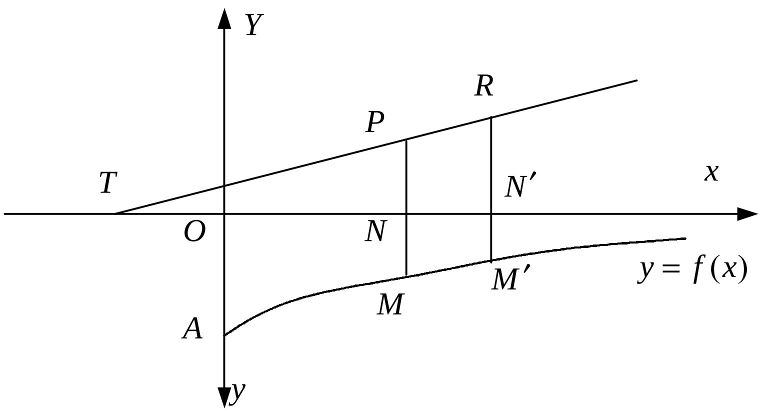


(3)

   b) Ištirkite funkcijos $Y=F(x)$ iškilumą. (1)

   c) Nubrėžkite funkcijos $Y=F(x)$ grafiko liestinę taške $(1,F(1))$ ir raskite jos susikirtimo taško su x-sų ašimi koordinates. (1)

2. Duota tolydi mažėjanti teigiama funkcija $y=f(x), x\geq 0$. Brėžinyje pavaizduotas jos grafiko eskizas.



$PN=$ plotas($AONM$) , $PN/TN=NM$, taškas N' yra dešiniau taško N. Statmenyje, iškeltame iš taško N' aukštyn, atidėkime tašką P' taip, kad $P'N'=$ plotas($AON'M'$) , (taškas P' brėžinyje nepažymėtas). Jei atidėtume brėžinyje visus tokius taškus P, tai gautume funkcijos $Y=F(x)=\int_0^x f(u)du$ grafiką.

   a) Įrodykite (nenaudodami matematinės analizės), kad taškas P' yra žemiau taško R (arba $P'N'<RN'$). Analogišką rezultatą gautume, jei imtume tašką N'', esantį tarp taškų O ir N (įrodinėti nereikia). (3)

   b) Kokią išvadą galima padaryti iš dalies (a) rezultato? (3)

   c) Paaiškinkite dalies (a) rezultatą, naudodamiesi šiuolaikine matematinės analizės kalba. (3)

   d) Kodėl taškas T yra pažymėtas koordinačių ašyje į kairę nuo koordinačių pradžios, o ne į dešinę? (2)

3.

a) Išveskite rekurentinę formulę $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$, n – natūralusis skaičius. (3)

b) Apskaičiuokite I_n, naudodamiesi išvesta rekurentine formule. (2)

c) Apskaičiuokte I_n, naudodamiesi Euler'io integralais. (3)

4. Duota funkcija $f(x) = 1/(1+x)^2$, $x \geq 0$. Apibrėžkime laiptinių funkcijų seką

$$\varphi_n(x) = 1/\left(1+\frac{k}{n}\right)^2, \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}, k = 0,1,...,n-2, \varphi_n(x) = 1/\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2, \frac{n-1}{n} \leq x \leq 1.$$

a) Nubrėžkite funkcijų f ir φ_5 grafikus viename brėžinyje. (2)

b) Pavaizduokite atstumą tarp funkcijų f ir φ_5 brėžinyje
$d(f,\varphi_5) = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - \varphi_5(x)|$. (1)

c) Apskaičiuokite (įvertinkite) atstumą tarp funkcijų f ir φ_n
$d(f,\varphi_n) = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - \varphi_n(x)|$
ir įrodykite, kad laiptinių funkcijų seka φ_n tolygiai konverguoja į funkciją f intervale $[0,1]$. (3)

d) Apskaičiuokite integralus $\int_0^1 \varphi_n(x)dx$ ir raskite ribą $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)dx$. (2)

5.

a) Parašykite, ką reiškia, kad funkcija $f(x) = 1/(1+x)^2$ yra tolygiai tolydi intervale $[0,1]$. Įrodykite tai (pagal apibrėžimą). (3)

b) Ar funkcija $f(x) = 1/(1+x)^2$ yra tolygiai tolydi intervale $[0,+\infty)$? Atsakymą pagrįskite. (2)

6. Duota seka $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{an}{(n+ka)^2}, a > 0$.

a) Interpretuokite šitą sumą kaip tam tikros funkcijos tam tikram intervale Rymano (Darbu) integralinę sumą. Būtų gerai piešinukai. (3)

b) Interpretuokite sumą kaip tam tikros laiptinės funkcijos intgeralą. (3)

c) Raskite sekos $\{x_n\}$ ribą. Atsakymą pagrįskite. (3)

7. Duota eilutė $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^n ne^{-nx}$.

a) Kokioms x reikšmėms ir kokį atsakymą galima pasakyti apie eilutės konvergavimą arba divergavimą, pritaikius eilučių konvergavimo požymius:
   i) Dalambero, (1)
   ii) Koši, (1)
   iii) Leibnico, (3)

b) Raskite eilutės tolygaus konvergavimo intervalą. (3)

c) Suintegruokite eilutę panariui ir raskite jos sumą. (4)

d) Ar išdiferencijuotos panariui eilutės suma bus lygi eilutės sumos išvestinei? (4)

Pastaba. Užduočių vertė šiek tiek gali būti pakoreguota (dažniausiai padidinta), jei sprendimas labai protingas arba retas.

Paruošė R.Kudžma