Matematinės analizės kontrolinio darbo užduočių sprendimai
2004.04.03

1. *Duotas integralas* $\int_0^{+\infty} \frac{x}{8+x^3}dx$.

   a) *Ištirkite integralo konvergavimą.* (1)

Taškas $+\infty$ yra vienintelis integralo ypatingas taškas.

$$\frac{x}{8+x^3} = \frac{x}{x^3\left(\frac{8}{x^3}+1\right)} \sim \frac{1}{x^2}, \text{ kai } x \to +\infty.$$

Funkcija $\frac{1}{x^2}$ integruojama intervale $[1;+\infty)$. Todėl ir funkcija $\frac{x}{8+x^3}$ yra integruojama intervale $[1;+\infty)$. Intervale $[0;1]$ funkcija $\frac{x}{8+x^3}$ yra integruojama todėl, kad tolydi.

   b) *Išdėstykite pointegralinę funkciją paprastosiomis trupmenomis.* (2)

$$\frac{x}{8+x^3} = \frac{x}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$= \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2-2x+4} = \frac{a(x^2-2x+4)+(bx+c)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

Sudarome lygčių sistemą

$x=-2: -2 = a(4+4+4),$

$x^0 \quad :0 = 4a+2c,$

$x^2 \quad :0 = a+b.$

$a = -\frac{1}{6}, c = -2a = \frac{1}{3}, b = -a = \frac{1}{6},$

$$\frac{x}{8+x^3} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{x+2}{x^2-2x+4}.$$

   c) *Suraskite pirmykštę funkciją* (2)

$$\int \frac{x}{8+x^3}dx = \int\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{6}\int\frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{6}\int\frac{x+2}{x^2-2x+4}dx$$

Antrojo integralo skaitiklyje padarome $(x^2-2x+4)' = 2x-2$

$$\frac{1}{6}\int\frac{x+2}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{12}\int\frac{2x+4}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{12}\int\frac{2x-2+6}{x^2-2x+4}dx$$
$$=\frac{1}{12}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+4}dx+\frac{1}{12}\int\frac{6}{x^2-2x+4}dx$$
$$=\frac{1}{12}\int\frac{d(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-1)^2+3}dx$$
$$=\frac{1}{12}\ln(x^2-2x+4)+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{12}\ln(x^2-2x+4)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$$
$$\int\frac{x}{8+x^3}dx=-\frac{1}{6}\ln|x+2|+\frac{1}{12}\ln(x^2-2x+4)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C\,.$$

d) *Sustatykite rėžius ir apskaičiuokite integralą.* (2)

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{8+x^3}dx=\left(-\frac{1}{6}\ln|x+2|+\frac{1}{12}\ln(x^2-2x+4)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$
$$=\left(\frac{1}{12}\ln\frac{x^2-2x+4}{(x+2)^2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{12}\ln\frac{x^2-2x+4}{(x+2)^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{12}\ln\frac{4}{(2)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{12}\ln 1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{12}\ln 1-\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

e) *Apskaičiuokite duotąjį integralą, išreikšdami jį Eulerio integralais.* (2)

Pritaikykime “arbatinuko principą” ir suveskime į spręstą per paskaitą integralą $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^3}dx$. Integrale vietoje 8 reikia turėti 1. Tai padaroma, keičiant kintamuosius $y=\frac{x}{2}$. Rėžiai nesikeičia !

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{8+x^3}dx=\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^3}dx=\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\frac{4\cdot\frac{x}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^3}d\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{y}{1+y^3}dy\,.$$

Dabar galėsime atlikti standartinį keitinį $\frac{1}{1+y^3}=t$. Išsprendę y, gauname

$$y=\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{3}},\ dy=\frac{1}{3}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\frac{1}{3}(1-t)^{-\frac{2}{3}}t^{\frac{2}{3}-2}dt\,,$$
$$y=0,t=1,$$
$$y=+\infty,t=0.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{8+x^3}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^3}\,dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 (1-t)^{\frac{1}{3}} t^{-\frac{1}{3}} \cdot t \cdot \frac{1}{3}(1-t)^{-\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}-2}\,dt$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-t)^{\frac{2}{3}-1} t^{\frac{1}{3}-1}\,dt = \frac{1}{6}\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$= \frac{1}{6}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

Kadangi dviem būdais gavome tą patį rezultatą, tai tikimybė, kad suintegravome teisingai, labai artima vienetui.

2. *Turime logaritminės funkcijos* $\ln(1+x)$ *Teiloro eilutę* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

a) *Kokioms x reikšmėms ir kokį atsakymą galima pasakyti apie eilutės konvergavimą arba divergavimą, pritaikius eilučių konvergavimo požymius*:

i) *Dalambero.* (1)

Skaičiuojame santykio ribą

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|x|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|x|^n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x| = |x|.$$

Kai $|x|<1$, tai eilutė konverguoja **absoliučiai**;

kai $|x|>1$, eilutė diverguoja, (neišpildyta būtinoji eilutės konvergavimo sąlyga);

kai $|x|=1$, požymis atsakymo neduoda.

ii) *Koši.* (1)

Skaičiuojame ribą

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = \frac{|x|}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}} = |x|.$$

Atsakymas lygiai toks pat kaip ir taikant Dalambero požymį.

iii) *Integralinį.* (2)

Kai $x=-1$, tai $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ konverguoja ar diverguoja kartu su integralu $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$. Žinome, kad pastarasis integralas diverguoja. Taigi eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{n}$ diverguoja (jos suma yra $-\infty$).

iv) *Leibnico.* (2)

Kai $0 < x \le 1$, tai seka $a_n = \frac{x^n}{n}$ yra mažėjanti ($\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ ir $x^{n+1} \le x^n$) ir $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0$.

Galima taikyti Lebnico požymį, kuris teigia, kad tada eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ konverguoja.

v) *Abelio.* (2)

Laikykime $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^{n-1} x^n$. Tada

$B_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = x - x^2 + ... + (-1)^{n-1} x^n = \frac{x - (-1)^n x^{n+1}}{1+x}$, kai $x \ne -1$.

Kai $|x| < 1$, tai seka $\{B_n\}$ konverguoja (arba eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$), o $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Patenkintos abiejų, tiek Abelio, tiek Dirichle, požymių sąlygos. Eilutė konverguoja.

vi) *Dirichle.* (2)

Laikykime $a_n = \frac{x^n}{n}$, $b_n = (-1)^{n-1}$. Tada $B_n = 0$, kai n – lyginis ir $B_n = 1$, kai – nelyginis; seka $\{B_n\}$ aprėžta. Kai $0 < x \le 1$, tai seka $\{a_n\}$ monotoniška (mažėjanti) ir $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0$. Patenkintos Dirichle požymio sąlygos. Eilutė konverguoja.

b) *Įrodykite nelygybę* $\ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, *kai* $0 \le x \le 1$. (4

Kai $0 \le x \le 1$, tai seka $a_n = \frac{x^n}{n}$ yra mažėjanti ir $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Galima taikyti Leibnico teoremą. Pagrindinė teoremos įrodymo idėja yra ta, kad dalinių sumų $\{s_n(x)\}$ sekos nelyginių narių posekis

$$s_{2n-1}(x) = \sum_{n=1}^{2n-1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$$= x - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) - ... - \left(\frac{x^{2n-2}}{2n-2} - \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)$$

mažėdamas artėja prie eilutės sumos $s(x)$. Šiuo atveju $s(x) = \ln(1+x)$. Taigi

$$s_{2n-1}(x) \ge s(x), n = 1,2,...,0 \le x \le 1.$$

Kai $n = 2$, gauname

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ge \ln(1+x).$$

3. *Duota funkcija* $g(x) = \frac{1}{x^2}\left(x - k - \frac{1}{2}\right), k \le x \le k+1.$

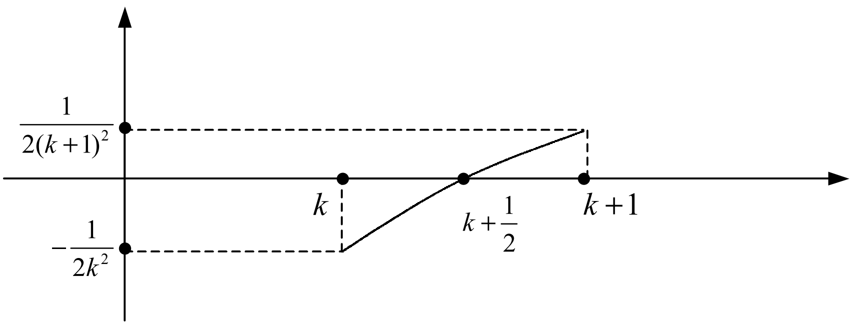
a) *Nubrėžkite funkcijos* $g(x)$ *grafiko eskizą intervale* [k; k + 1]. *Neintegravę paiškinkite, kodėl integralas* $\int_k^{k+1} g(x)dx$ *turėtų būti neigiamas.* (2)

Apskaičiuojame išvestinę.

$$g'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{k+\frac{1}{2}}{x^2} \right)' = -\frac{1}{x^2} + 2\frac{k+\frac{1}{2}}{x^3} = \frac{2k+1-x}{x^3}.$$

Kai $k \le x \le k+1$, tai išvestinė teigiama. Todėl funkcija *g* didėjanti. Svarbios trys funkcijos reikšmės:

$$g(k) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^2},\ g\left(k+\frac{1}{2}\right) = 0,\ g(k+1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(k+1)^2}.$$



Funkcija lygi nuliui tiksliai intervalo viduryje, o $|g(k)| > |g(k+1)|$. Todėl apatinis plotelis turėtų būti didesnis už viršutinį. Integralų kalba tai reikštų, kad $\int_k^{k+1} g(x)dx < 0$.

b) *Suintegruokite* $\int_k^{k+1} g(x)dx$. (2)

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} g(x)dx &= \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\left(x-k-\frac{1}{2}\right)dx \\ &= \int_k^{k+1}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)dx \\ &= \ln x\Big|_k^{k+1} + \frac{1}{x}\left(k+\frac{1}{2}\right)\Big|_k^{k+1} \\ &= \ln(k+1) - \ln k + \frac{2k+1}{2(k+1)} - \frac{2k+1}{2k} \\ &= \ln\frac{k+1}{k} + \frac{(2k+1)(k-k-1)}{2(k+1)k} \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{2k+1}{2k(k+1)}.\end{aligned}$$

c) *Naudodamiesi 2 uždavinio (b) dalies nelygybe ir ir šio uždavinio dalies (b) rezultatu, įrodykite, kad integralas* $\int_k^{k+1} g(x)dx < 0$ (2)

Pritaikome gautą nelygybę

$$\int_k^{k+1} g(x)dx = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \le \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} = \frac{6k^2-3k+2}{6k^3}.$$

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{2k+1}{2k(k+1)} &\le \frac{6k^2-3k+2}{6k^3} - \frac{2k+1}{2k(k+1)} \\ &= \frac{(6k^2-3k+2)(k+1)-(2k+1)3k^2}{6k^3(k+1)} \\ &= \frac{6k^3+6k^2-3k^2-3k+2k+2-6k^3-3k^2}{6k^3(k+1)} \\ &= \frac{-k+2}{6k^3(k+1)} \\ &= -\frac{k-2}{6k^3(k+1)}.\end{aligned}$$

Kai $k > 2$, tai $\int_k^{k+1} g(x)dx < 0$. Kai $k = 1, k = 2$, tai reikėtų integralus apskaičiuoti (surasti skaitines integralų reikšmes), o ne įvertinti. Siūlau tai padaryti dabar. Pradiniame kontrolinio variante tai buvo, bet paskutinės paskaitos metu nepabrėžiau, kad būtina atsinešti skaičiuoklius. Todėl neišdrįsau palikti tokio uždavinio:

“Apskaičiuokite 10^{-4} tikslumu integralą $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\left(x-1-\frac{1}{2}\right)dx$.”

d) *Padalinkite integralo* $\int_k^{k+1} g(x)dx$ *integravimo sritį pusiau, pakeiskite kintamuosius ir suveskite abu gautus integralus į vieną integralą intervale* $[0;\frac{1}{2}]$. *Iš to išveskite neintegravę (!), kad* $\int_k^{k+1} g(x)dx < 0$. (3)

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}\left(x-\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)dx = \int_k^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\left(x-\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)dx + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} \frac{1}{x^2}\left(x-\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)dx.$$

Pirmajame integrale keičiame $k+\frac{1}{2}-x=u$. Tada

$$dx=-du, x=k, u=\frac{1}{2}, x=k+\frac{1}{2}, u=0,$$

$$\int_k^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\left(x-\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)dx = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{-u}{\left(k+\frac{1}{2}-u\right)^2}(-du) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-u}{\left(k+\frac{1}{2}-u\right)^2}du$$

Antrajame integrale keičiame $u = x-k-\frac{1}{2}$. Tada

$$dx = du, x=k+\frac{1}{2}, u=0, x=k+1, u=\frac{1}{2},$$

$$\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} \frac{1}{x^2}\left(x-\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{u}{\left(k+\frac{1}{2}+u\right)^2}du,$$

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x^2}\left(x-\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-u}{\left(k+\frac{1}{2}-u\right)^2}du+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{u}{\left(k+\frac{1}{2}+u\right)^2}du$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{-u}{\left(k+\frac{1}{2}-u\right)^2}+\frac{u}{\left(k+\frac{1}{2}+u\right)^2}\right)du$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-u\left(\left(k+\frac{1}{2}+u\right)^2-\left(k+\frac{1}{2}-u\right)^2\right)}{\left(k+\frac{1}{2}-u\right)^2\left(k+\frac{1}{2}+u\right)^2}du$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-u(2k+1)2u}{\left(k+\frac{1}{2}-u\right)^2\left(k+\frac{1}{2}+u\right)^2}du$$

Matome, kad pointegralinė funkcija neigiama. Todėl ir integralas neigiamas.

4. a) *Tolydžiai diferencijuojamai funkcijai f įrodykite formulę:*

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}(f(1)+f(0))-\int_0^1\varphi(x)f'(x)dx,$$

čia $\varphi(x)=x-\frac{1}{2}$. (1)

Integruokime dalimis

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)d\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=f(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1-\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)df(x)$$

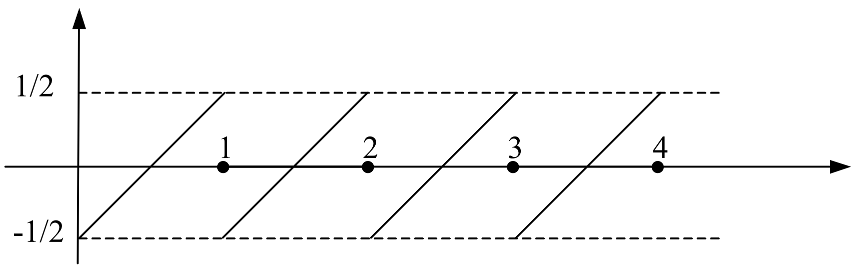
$$=\frac{1}{2}(f(1)+f(0))-\int_0^1\varphi(x)f'(x)dx.$$

b) Apibrėžkime funkciją

$\psi(x)=\varphi(x), 0\le x\le 1,$

$\psi(x)=\varphi(x-k), k<x\le k+1, k=1,2,\dots .$

Nubrėžkite funkcijos ψ grafiko eskizą intervale $[0;4]$. (1)



c) *Įrodykite, kad* $\int_k^{k+1} f(x)dx=\frac{1}{2}(f(k)+f(k+1))-\int_k^{k+1}\psi(x)f'(x)dx$, $k\in\mathbb{N}$. (2)

Integruokime dalimis

$$\int_k^{k+1} f(x)dx = \int_k^{k+1} f(x)d\left(x-k-\frac{1}{2}\right)$$
$$= f(x)\left(x-k-\frac{1}{2}\right)\Big|_k^{k+1} - \int_k^{k+1}\left(x-k-\frac{1}{2}\right)df(x)$$
$$= f(k+1)\left(k+1-k-\frac{1}{2}\right) - f(k)\left(k-k-\frac{1}{2}\right) - \int_k^{k+1}\left(x-k-\frac{1}{2}\right)df(x)$$
$$\frac{1}{2}(f(k)+f(k+1)) - \int_k^{k+1}\psi(x)f'(x)dx$$

d) *Įrodykite, kad*
$$\int_1^n f(x)dx = \frac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)-\int_1^n \psi(x)f'(x)dx. \quad (2)$$

Susumuokime lygybes, įrodytas pereitoje dalyje nuo 1 iki $n-1$:

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2}(f(1)+f(2)) - \int_1^2 \psi(x)f'(x)dx,$$
$$\dots$$
$$\int_k^{k+1} f(x)dx = \frac{1}{2}(f(k)+f(k+1)) - \int_k^{k+1}\psi(x)f'(x)dx,$$
$$\dots$$
$$\int_{n-1}^n f(x)dx = \frac{1}{2}(f(n-1)+f(n)) - \int_{n-1}^n \psi(x)f'(x)dx$$
$$\int_1^n f(x)dx = \frac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)-\int_1^n \psi(x)f'(x)dx$$

e) *Pritaikykite dalies* (d) *formulę funkcijai* $f(x)=\frac{1}{x}$ *ir apskaičiuokite* $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ (3)

$$\int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln x\big|_1^n = \ln n$$
$$\frac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2n}$$
$$\int_1^n \psi(x)f'(x)dx = -\int_1^n \frac{\psi(x)}{x^2}dx$$
$$\ln n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2n}+\int_1^n \frac{\psi(x)}{x^2}dx$$

Prie abiejų lygybės pusių pridedame $\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$ ir gauname
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n} = \ln n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}-\int_1^n \frac{\psi(x)}{x^2}dx$$

f) *Įrodykite, kad integralas* $\int_1^{+\infty}\frac{|\psi(x)|}{x^2}dx$ *konverguoja.* (2)

Įvertinkime funkciją $\psi(x)=x-k-\frac{1}{2}, k<x\le k+1$. Funkcija didėja intervale $(k;k+1]$, $\lim_{x\downarrow k}\psi(x)=-\frac{1}{2}$, $\lim_{x\uparrow k+1}\psi(x)=\frac{1}{2}$. Taigi $-\frac{1}{2}\le\psi(x)\le\frac{1}{2}$, kai $k<x\le k+1$ ir

$|\psi(x)| \le \frac{1}{2}, k < x \le k+1$. Tada $|\psi(x)| \le \frac{1}{2}$ intervale $[1;+\infty)$ ir $\left|\frac{\psi(x)}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$. Žinome, kad funkcija $\frac{1}{x^2}$ yra integruojama intervale $[1;+\infty)$. Vadinasi, šiame intervale integruojama ir mažesnė funkcija $\frac{|\psi(x)|}{x^2}$.

g) *Įrodykite, kad* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \frac{1}{2} - \int_1^{+\infty}\frac{\psi(x)}{x^2}dx$ (4)

Iš dalies (d) gauname

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^n \frac{\psi(x)}{x^2}dx.$$

Belieka įrodyti, kad egzistuoja riba $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\psi(x)}{x^2}dx$. Suformuluosime Koši kriterijų funkcijai $F(b) = \int_1^b \frac{\psi(x)}{x^2}dx$:

$$\forall\varepsilon, \varepsilon > 0, \exists B, B < b < b_1 \Rightarrow |F(b_1) - F(b)| = \left|\int_b^{b_1}\frac{\psi(x)}{x^2}dx\right| < \varepsilon.$$

Dalyje (f) įrodėme, kad integralas $\int_1^{+\infty}\frac{|\psi(x)|}{x^2}dx$ konverguoja, t.y egzistuoja riba $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b\frac{|\psi(x)|}{x^2}dx$. Ši riba egzistuoja tada ir tik tada, kai patenkinama Koši sąlyga, t.y.

$$\forall\varepsilon, \varepsilon > 0, \exists B, B < b < b_1 \Rightarrow \int_b^{b_1}\frac{|\psi(x)|}{x^2}dx < \varepsilon.$$

Pasirėmę tikėtina nelygybe

$$\left|\int_b^{b_1}\frac{\psi(x)}{x^2}dx\right| \le \int_b^{b_1}\frac{|\psi(x)|}{x^2}dx,$$

gauname

$$\left|\int_b^{b_1}\frac{\psi(x)}{x^2}dx\right| \le \int_b^{b_1}\frac{|\psi(x)|}{x^2}dx < \varepsilon,$$

kai $b_1 > b > B$.

5. *Naudodamiesi rezultatu* $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$, *kai* $n \to \infty$, *kuris išplaukia iš 4 uždavinio (g) dalies, raskite sumą eilutės (vienas narys teigiamas, du neigiami)*

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots,$$

kuri gauta perstačius eilutę $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. (3)

Kad nešokiruotų silpnesnių nervų skaitytojų aritmetika su $o(\,)$ (kaip buvo daryta per paskaitą), pakeisime harmoninės eilutės dalinių sumų išraišką kita ekvivalenčia

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + h_n,$$

čia $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$. Beje, tą h_n galima tiksliai užrašyti.

Apskaičiuojame perstatytos eilutės dalinę sumą

$$\begin{aligned}
s_{3n} &= \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)\\
&=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n}\right)\\
&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\\
&=\frac{1}{2}(\ln 2n+\gamma+h_{2n}-\ln n-\gamma-h_n)\\
&=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\left(h_{2n}-h_n\right)\\
&\to\frac{1}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

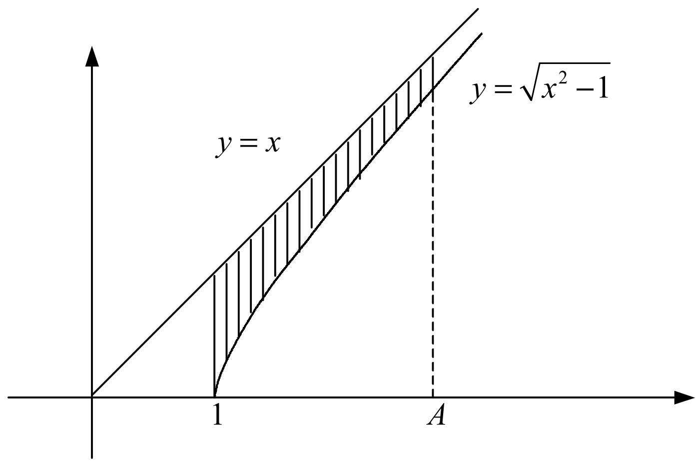
kai $n\to\infty$.

$$s_{3n+1}=s_{3n}+\frac{1}{2n+1}\to\frac{1}{2}\ln 2, n\to\infty,$$

$$s_{3n+2}=s_{3n+1}-\frac{1}{4n-2}\to\frac{1}{2}\ln 2, n\to\infty.$$

Trys posekiai, išsemiantys visą seką, konverguoja į $\frac{1}{2}\ln 2$. Taigi ir visa seka konverguoja į $\frac{1}{2}\ln 2$.

6. a) *Nubrėžkite funkcijos* $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ *grafiką.* (1)



b) *Dalies* (a) *brėžinyje pavaizduokite figūrą, kurios plotą išreiškia integralas* $\int_1^A (x-\sqrt{x^2-1})dx$, $A>1$. (1)

Reikia pastebėti, kad $\sqrt{x^2-1}<x$, kai $x>1$, o tiesė $y=x$ yra kreivės $y=\sqrt{x^2-1}$ asimptotė.

c) *Funkcija* $x = \operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ *yra didėjanti intervale* $[0;+\infty)$. *Apskaičiuokite atvirkštinę funkciją* $t = \operatorname{arch} x$ *ir jos išvestinę* (*pastarąją dviem būdais*). (3)

Pradžiai reikėtų pastebėti, kad $\operatorname{ch}(0) = 1$ ir $\lim_{t\to+\infty} \operatorname{ch} t = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = +\infty$. Taigi hiperbolinio kosinuso reikšmių sritis yra intervalas $[1;+\infty)$. Spręskime lygtį

$$x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}),$$

$$2x = e^t + e^{-t},$$

$$e^{2t} - 2xe^t + 1 = 0,$$

$$(e^t)_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

Logaritmuojame ir gauname

$$t_{1,2} = \ln e^t = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Kai $x > 1$, tai $x + \sqrt{x^2 - 1} > 1$ ir $\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) > 0$, o

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x^2 - x^2 + 1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} < 1.$$

Taigi tada $\ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) < 0$. Todėl atvirkštinis hiperbolinis kosinusas yra

$$t = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \ge 1.$$

$$\operatorname{arch}' x = \ln'(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Kitas būdas apskaičiuoti išvestinę – tai naudotis atvirkštinės funkcijos išvestinės teorema.

$$\operatorname{arch}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(t)} = \frac{1}{\operatorname{sh} t} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Naudojomės žinomomis formulėmis $\operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t$ ir $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.

d) *Suintegruokite skirtingais būdais integralą* (*pateikiamas atsakymas*)

$$\int \sqrt{x^2 - 1}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C$$ (už skirtingą būdą po 2 t.)

(*ženklo pakeitimas Euler'io keitiniuose nebus laikomas kitu būdu*).

1 būdas. Keiskime kintamuosius

$$x = \operatorname{ch} t,$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{sh} t,$$

$$dx = \operatorname{sh} t dt;$$

$$
\begin{aligned}
\int\sqrt{x^2-1}\,dx &= \int \operatorname{sh} t \operatorname{sh} t\,dt \\
&= \int \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t - \frac{1}{2}t + C \\
&= \frac{1}{4} 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \frac{1}{2}t + C \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C
\end{aligned}
$$

2 būdas. Naudokime Euler'io keitinį $\sqrt{x^2-1} = x - z$. Tada

$$x^2 - 1 = x^2 - 2xz + z^2,$$

$$2xz = 1 + z^2,$$

$$x = \frac{1+z^2}{2z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + z\right),$$

$$\sqrt{x^2-1} = x - z = \frac{1+z^2}{2z} - z = \frac{1-z^2}{2z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - z\right),$$

$$dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)dz = \frac{1}{2}\frac{z^2-1}{z^2}\,dz$$

$$
\begin{aligned}
&\int\sqrt{x^2-1}\,dx = \int \frac{1-z^2}{2z}\frac{z^2-1}{2z^2}\,dz \\
&= -\frac{1}{4}\int \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^3}\,dz \\
&= -\frac{1}{4}\int\left(z - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3}\right)dz \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{z^2}{2} - 2\ln z - \frac{1}{2z^2}\right) + C \\
&= -\frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{2}\ln z + \frac{1}{8z^2} + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{z^2} - z^2\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{z} - z\right)\left(\frac{1}{z} + z\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + C
\end{aligned}
$$

3 būdas. Integruokime dalimis

$$
\begin{aligned}
\int\sqrt{x^2-1}\,dx &= x\sqrt{x^2-1} - \int x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2-1} - \int\sqrt{x^2-1}\,dx - \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}
$$

Gavome lygtį integralo $\int\sqrt{x^2-1}dx$ atžvilgiu. Ją išsprendžiame, o paskutinį integralą suintegruojame, nes (c) dalyje išvedėme, kad $\ln'(x+\sqrt{x^2-1})=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2-1}dx&=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\\&=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C\end{aligned}$$

e) Ištirkite integralo $\int_1^\infty(x-\sqrt{x^2-1})dx$ konvergavimą pagal apibrėžimą. (2)

Kadangi integralas jau beveik parašytas, tai reikia apskaičiuoti ribą

$$\lim_{A\to\infty}\int_1^A\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)dx=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)\Bigg|_1^A$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{A^2}{2}-\frac{1}{2}A\sqrt{A^2-1}+\ln\left(A^2+\sqrt{A^2-1}\right)-\frac{1}{2}\right)$$

Jei nenorime skaičiuoti pirmųjų dėmenų ribos, tai reikia pastebėti, kad

$$A^2-A\sqrt{A^2-1}>0.$$

Tada

$$\lim_{A\to\infty}\left(\frac{A^2}{2}-\frac{1}{2}A\sqrt{A^2-1}+\ln\left(A^2+\sqrt{A^2-1}\right)-\frac{1}{2}\right)\geq\lim_{A\to\infty}\left(\ln\left(A^2+\sqrt{A^2-1}\right)-\frac{1}{2}\right)=+\infty.$$

f) *Ištirkite integralo* $\int_1^\infty(x-\sqrt{x^2-1})dx$ *konvergavimą naudodami palyginimo teoremą.* (2)

Reikia išsiaiškinti, kokiam x-so laipsniui pointegralinė funkcija yra ekvivalentiška, kai $x\to\infty$.

$$\begin{aligned}x-\sqrt{x^2-1}&=\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}\\&=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\\&=\frac{1}{x+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\\&=\frac{1}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\sim\frac{1}{2x},x\to+\infty.\end{aligned}$$

Tokį rezultatą galima gauti ir kitaip

$$\begin{aligned} x-\sqrt{x^2-1} &= x-x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= x-x\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x-x+\frac{1}{2x}-x\cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{2x}, x\to\infty \end{aligned}$$

Funkcija $\frac{1}{x}$ nėra integruojama intervale $[1;+\infty)$. Tada tokia pati yra ir funkcija $x-\sqrt{x^2-1}$ arba integralas $\int_1^\infty (x-\sqrt{x^2-1})dx$ diverguoja.

Pastaba. (Tiems, kurie perskaitys iki galo). Neturėjau laiko pertikrinti sprendimų. Už surastas klaidas premijuosiu. Galite siųsti el. paštu Ricardas.Kudzma@maf.vu.lt