Matematinės analizės kontrolinis darbas
2004.04.03

Nurodymai.

- **Atidžiai skaitykite sąlygas. Darykite tiksliai tai, ko reikajaujama.**
- **Švarraštis gali būti tik dešiniojoje sąsiuvinio pusėje (išskyrus paskutinį pusl.).**
- **Uždavinio numerį žymėkite puslapio kairiojoje pusėje didesniu šriftu.**

1. Duotas integralas $\int_0^{+\infty} \frac{x}{8+x^3} dx$.
   a) Ištirkite integralo konvergavimą. (1)
   b) Išdėstykite pointegralinę funkciją paprastosiomis trupmenomis. (2)
   c) Suraskite pirmykštę funkciją (2)
   d) Sustatykite rėžius ir apskaičiuokite netiesioginį integralą. (2)
   e) Apskaičiuokite duotąjį integralą, išreikšdami jį Euler'io integralais. (2)

2. Turime logaritminės funkcijos $\ln(1+x)$ Teiloro eilutę $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.
   a) Kokioms x reikšmėms ir kokį atsakymą galima pasakyti apie eilutės konvergavimą arba divergavimą, pritaikius eilučių konvergavimo požymius:
      i) Dalambero, (1)
      ii) Koši, (1)
      iii) Integralinį (2)
      iv) Leibnico, (2)
      v) Abelio, (2)
      vi) Dirichle. (2)
   b) Įrodykite nelygybę $\ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, kai $0 \le x \le 1$ (siūlau naudotis tuo, kad tiriamos eilutės suma tikrai yra lygi $\ln(1+x)$). (4)

3. Duota funkcija $g(x) = \frac{1}{x^2}\left(x - k - \frac{1}{2}\right), k \le x \le k+1$.
   a) Nubrėžkite funkcijos $g(x)$ grafiko eskizą intervale [k; k + 1]. Neintegravę paiškinkite, kodėl integralas $\int_k^{k+1} g(x)dx$ turėtų būti neigiamas. (2)
   b) Suintegruokite $\int_k^{k+1} g(x)dx$. (2)
   c) Naudodamiesi 2 uždavinio (b) dalies nelygybe ir ir šio uždavinio dalies (b) rezultatu, įrodykite, kad integralas $\int_k^{k+1} g(x)dx < 0$ (2)
   d) Padalinkite integralo $\int_k^{k+1} g(x)dx$ integravimo sritį pusiau, pakeiskite kintamuosius ir suveskite abu gautus integralus į vieną integralą intervale $[0; \frac{1}{2}]$. Iš to išveskite neintegravę (!), kad $\int_k^{k+1} g(x)dx < 0$. (3)

4. a) Tolydžiai diferencijuojamai funkcijai f įrodykite formulę:
   $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx$. (1)

b) Apibrėžkime funkciją

$$\psi(x) = x - k - \frac{1}{2}, k < x \le k+1, k = 1,2,\ldots .$$

Nubrėžkite funkcijos ψ grafiko eskizą intervale $[0;4]$. (1)

c) Įrodykite, kad $\int_k^{k+1} f(x)dx = \frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) - \int_k^{k+1} \psi(x) f'(x)dx$, $k \in \mathbb{N}$. (1)

d) Įrodykite, kad

$$\int_1^n f(x)dx = \frac{1}{2} f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_1^n \psi(x) f'(x)dx .$$ (1)

e) Pritaikykite dalies (d) formulę funkcijai $f(x) = \frac{1}{x}$ ir apskaičiuokite $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (3)

f) Įrodykite, kad integralas $\int_1^{+\infty} \frac{|\psi(x)|}{x^2} dx$ konverguoja. (2)

g) Įrodykite, kad $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = \frac{1}{2} - \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^2} dx$; (2)

Pastaroji riba žymima γ ir vadinama Euler'io konstanta

5 Naudodamiesi rezultatu $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$, kai $n \to \infty$, kuris išplaukia iš 4 uždavinio (g) dalies, raskite sumą eilutės (vienas narys teigiamas, du neigiami)

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots ,$$

kuri gauta perstačius eilutę $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$. (4)

6. a) Nubrėžkite funkcijos $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ grafiką. (1)

b) Dalies (a) brėžinyje pavaizduokite figūrą, kurios plotą išreiškia integralas

$$\int_1^A (x - \sqrt{x^2 - 1})dx, \ A > 1 .$$ (1)

c) Funkcija $x = \operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ yra didėjanti intervale $[0;+\infty)$. Apskaičiuokite atvirkštinę funkciją $t = \operatorname{arch} x$ ir jos išvestinę (pastarąją dviem būdais). (3)

d) Suintegruokite skirtingais būdais integralą (pateikiamas atsakymas)

$$\int \sqrt{x^2 - 1}dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C$$ (už skirtingą būdą po 2 t.)

(ženklo pakeitimas Euler'io keitiniuose nebus laikomas kitu būdu).

e) Ištirkite integralo $\int_1^{\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1})dx$ konvergavimą pagal apibrėžimą. (2)

f) Ištirkite integralo $\int_1^{\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1})dx$ konvergavimą naudodami palyginimo teoremą. (2)

Pastaba. Užduočių vertė šiek tiek gali būti pakoreguota (dažniausiai padidinta), jei sprendimas labai protingas arba retas.

Paruošė R.Kudžma