Egzamino (2004.01.08) užduočių sprendimai

1. *Įrodykite pagal apibrėžimą, kad funkcija $f(x) = x^2$ yra tolydi kiekviename taške.*

(2 t.)

Sprendimas. Patikrinti tolydumą taške a pagal ribos apibrėžimą - tai bet kokiam teigiamam ε išspręsti nelygybę

$$|x^2 - a^2| < \varepsilon . \qquad (1)$$

Pirmasis būdas.

$|x^2 - a^2| = |(x-a)(x+a)|$ (aštuntos klasės formulė)

$= |x-a| \cdot |x+a|$ (modulių savybė)

$\le |x-a| \cdot (|x| + |a|)$ (trikampio nelygybė)

$\le |x-a| \cdot (2|a| + |a|)$ (apribokime x kitimą: $|x| < 2|a|$)

$= |x-a| \cdot 3|a| < \varepsilon$ (sudėkime $|a|$)

Kai $a \ne 0$, tai paskutiniąją nelygybę galima išspręsti $|x-a|$ atžvilgiu

$$|x-a| < \frac{\varepsilon}{3|a|} .$$

Jei paimsime

$$\delta = \min\left(2|a|, \frac{\varepsilon}{3|a|}\right), \qquad (2)$$

tai $|x-a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon$. Jei a didelis, tai δ apibrėžime (2) mažesnis bus antrasis narys, jei a – mažas, tai mažesnis gali būti pirmasis.
Kai $a = 0$, tai galima iškart išspręsti nelygybę

$$|x^2| < \varepsilon \;\Rightarrow\; |x| < \sqrt{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \delta = \sqrt{\varepsilon} .$$

Antrasis būdas. Nelygybė (1) ekvivalentiška dviem nelygybėm

$$a^2 - \varepsilon < x^2 < a^2 + \varepsilon . \qquad (3)$$

Jei $\varepsilon < a^2$, tai galima traukti kvadratines šaknis nelygybėse (3) ir surasti δ .

$$a > 0, \sqrt{a^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{a^2 + \varepsilon}, \delta = \min\left(\sqrt{a^2 + \varepsilon} - a, a - \sqrt{a^2 - \varepsilon}\right),$$

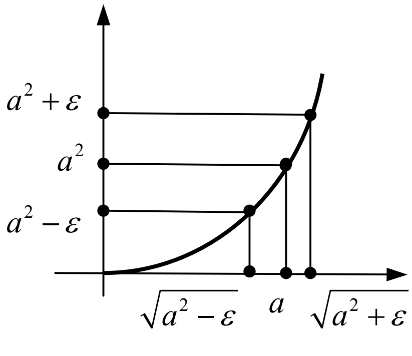
$$a < 0, -\sqrt{a^2 + \varepsilon} < x < -\sqrt{a^2 - \varepsilon}, \delta = \min\left(a + \sqrt{a^2 + \varepsilon}, -\sqrt{a^2 - \varepsilon} - a\right).$$

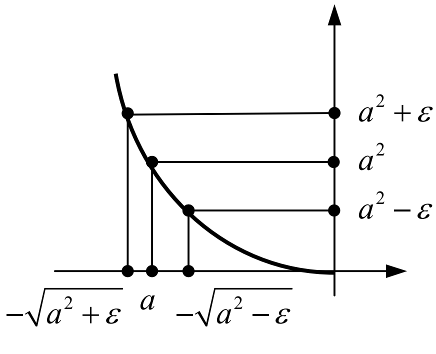
Jei $\varepsilon > a^2$, tai $a^2 - \varepsilon < 0$ ir kairioji nelygybė (3) bus visada teisinga.

$$a > 0, 0 < x < \sqrt{a^2 + \varepsilon}, \delta = \min\left(\sqrt{a^2 + \varepsilon} - a, a\right),$$

$$a < 0, -\sqrt{a^2 + \varepsilon} < x < 0, \delta = \min\left(a + \sqrt{a^2 + \varepsilon}, -a\right).$$

Kad būtų galima geriau suprasti šias visas nelygybes, reikia nusibrėžti brėžinius. Aš pirmiausiai tai ir padariau. Po to, žiūrėdamas į brėžinius, rašiau nelygybes ir δ .





2. *Nuo antikos laikų žinome, kad apskritimo liestinė – tai tiesė, turinti vieną bendrą tašką su apskritimu ir statmena apskritimo spinduliui.*

a) *Nubrėžkite viršutiniąją apskritimo* $x^2+y^2=1$ *dalį, pasirinkite jame tašką* $(x_0; y_0)$, $0<x_0<1, 0<y_0<1$, *per šį tašką nubrėžkite apskritimo liestinę. Parašykite liestinės lygtį, nenaudodami išvestinės.* (2 t.)

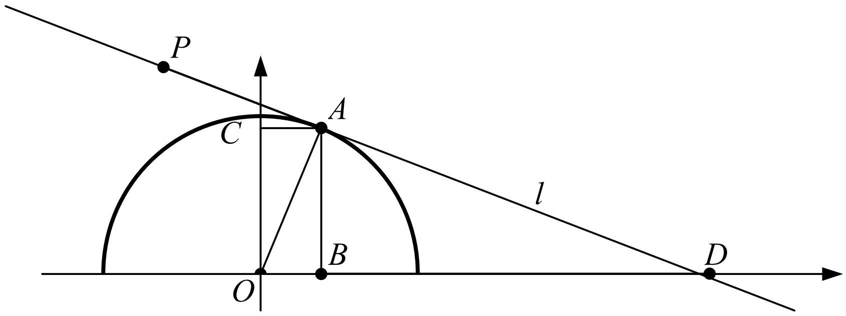
b) *Suformuluokite matematinės analizės rezultatus, kuriais remdamiesi iš apskritimo liestinės lygties, gautos dalyje* (a), *išvestumėte formulę*

$$\left(\sqrt{z}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{z}}.$$ (3 t.)

c) *Siūlau dalyje* (b) *kvadratinės šaknies funkciją* (*angl. square root*) *laikinai žymėti* $\sqrt{z}=\mathrm{sqrt}(z)$. *Kodėl taip siūlau*? (1 t.)

Sprendimas.

a)



$A=(x_0;y_0)$, $x_0^2+y_0^2=1$, $B=(x_0;0)$, $D=(x_1;0)$, $P=(x;y)$, $OA=1$, $OA\perp l$.

Liestinės l lygtį galima rašyti įvairiais būdais:

1. Vektorius $\overrightarrow{OA}=(x_0,y_0)$ statmenas tiesei l, taškas $P\in l$. Vektorių $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{AP}=(x-x_0,y-y_0)$ statmenumo sąlyga

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)=0. \qquad (4)$$

2. Atkarpos OA posvyris $k=\dfrac{y_0}{x_0}$. Statmenos tiesės l posvyris

$$k_1=-\frac{1}{k}=-\frac{x_0}{y_0}.$$

Tiesės, nusakytos tašku ir posvyriu, lygtis

$$y=y_0-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0). \qquad (5)$$

3. Statieji trikampiai ABO ir AOD yra panašūs. Teisinga

$$\frac{OB}{OA}=\frac{OA}{OD},\ \frac{x_0}{1}=\frac{1}{x_1},\ x_1=\frac{1}{x_0}.$$

Tiesės, einančios per du taškus, lygtis

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0},$$

$$\frac{y-y_0}{-y_0}=\frac{x-x_0}{\frac{1}{x_0}-x_0}. \tag{6}$$

4. Galima rasti liestinės l krypties vektorių $\tau=(\alpha,\beta)$ iš jo statmenumo su vektoriumi $\overrightarrow{OA}=(x_0;y_0)$ sąlygos

$$\left\langle\overrightarrow{OA},\tau\right\rangle=x_0\alpha+y_0\beta=0.$$

Nesunku matyti, kad galime paimti $\alpha=y_0,\beta=-x_0$. Vektorių $\overrightarrow{AP}=(x-x_0,y-y_0)$ ir $\tau=(\alpha,\beta)$ lygiagretumo sąlyga ir yra tiesės l lygtis

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{-x_0}{y_0}. \tag{7}$$

Galima įsitikinti, kad visos lygys (4)-(7) sutampa.

b) Uždavinio sprendimo idėja – sulyginti funkcijos $f(x)=\sqrt{1-x^2}=\text{sqrt}(1-x^2)$ grafiko liestinės lygtį

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \tag{8}$$

su lygtimi, gauta dalyje (a). Apskaičiuokime funkcijos f išvestinę:

$$f'(x_0)=\text{sqrt}'(1-x_0^2)\cdot(-2x_0). \tag{9}$$

$$y=\text{sqrt}(1-x_0^2)+\text{sqrt}'(1-x_0^2)\cdot(-2x_0)(x-x_0). \tag{10}$$

Sulyginimui geriausiai tinka (5) lygtis – nieko nereikia pertvarkyti, tik pastebėti, kad $y_0=\text{sqrt}(1-x_0^2)$. Kitas lygtis reikėtų suvesti į tokį pavidalą. Lyginti reikia tik posvyrius

$$\text{sqrt}'(1-x_0^2)\cdot(-2x_0)=-\frac{x_0}{y_0}=-\frac{x_0}{\text{sqrt}(1-x_0^2)}. \tag{11}$$

Iš (11) lygties gauname

$$\text{sqrt}'(1-x_0^2)=\frac{1}{2\,\text{sqrt}(1-x_0^2)}.$$

Pažymėję $1-x_0^2=z$, gauname

$$\text{sqrt}'(z)=\frac{1}{2\,\text{sqrt}(z)}. \tag{12}$$

Matematinės analizės faktai, reikalingi uždavino sprendimui:

1. Liestinės lygtis (8) diferencijuojamai funkcijai.
2. Kvadratinė šaknis yra diferencijuojama funkcija.
3. Sudėtinės funkcijos išvestinės teorema.
4. $\left(1-x^2\right)'=-2x$.

c) Dalyje (b) reikėjo skaičiuoti sudėtinės funkcijos išvestinę. Išraiška $\left(\sqrt{1-x_0^2}\right)'$ gali būti suprantama dvejopai. Jei x_0 laikysime konstanta, tai išvestinė turėtų būti lygi nuliui, o jei x_0 laikysime kintamuoju, tai $\left(\sqrt{1-x_0^2}\right)'$ niekuo nesiskiria nuo $f'(x_0)$. Dydis $\text{sqrt}'(1-x_0^2)$ korektiškai apibrėžtas ir nusako tai, ko mums reikia sudėtinės funkcijos išvestinės formulėje (9).

3.

a) *Kokių eksponentinės ir logaritminės funkcijų savybių reikia lygybei* $\exp\left(\frac{1}{2}\ln x\right)=\sqrt{x}$ *įrodyti*? *Naudodamiesi šia lygybe raskite* $\sqrt{x}$ *išvestinę*.(3t.)

b) *Įrodykite, kad* $\exp\left(\frac{p}{q}\ln x\right)=x^{\frac{p}{q}}$, *čia p, q – sveikieji skaičiai*, $q\neq 0$. (3 t.)

c) *Naudodamiesi dalies* (b) *rezultatu pagrįskite, kodėl natūralu apibrėžti laipsninę funkciją formule* $x^{\alpha}=\exp(\alpha\ln x)$, ($\alpha$ *- bet koks realus*)? (2 t.)

Sprendimas.

a) Pirmiausia reikia **įsisąmoninti**, kad kvadratinė šaknis iš x – tai skaičius, kurį pakėlę kvadratu, gausime x. Taigi reikia tikrinti

$$\exp\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\exp\left(\frac{1}{2}\ln x\right)=\exp\left(\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln x\right)=\exp(\ln x)=x. \tag{13}$$

Naudojomės eksponentinės funkcijos pagrindine savybe

$$\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b)$$

ir tuo, kad logaritmas yra eksponentinės funkcjos atvirkštinė funkcija

$$\exp(\ln x)=x.$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\left(\exp\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\right)'=\exp\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\left(\frac{1}{2}\ln x\right)'=\exp\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\frac{1}{2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

b) Paimkime $p=1, q\in\mathbf{N}$.

$$\underbrace{\exp\left(\frac{\ln x}{q}\right)\cdot\ldots\cdot\exp\left(\frac{\ln x}{q}\right)}_{q\,kartų}=\exp\underbrace{\left(\frac{\ln x}{q}+\ldots+\frac{\ln x}{q}\right)}_{q\,kartų}=\exp(\ln x)=x,$$

$$\exp\left(\frac{1}{q}\ln x\right)=x^{\frac{1}{q}}.$$

Paimkime $p\in\mathbf{N}, q\in\mathbf{N}$.

$$\exp\left(\frac{p}{q}\ln x\right)=\underbrace{\exp\left(\frac{\ln x}{q}\right)\cdot\ldots\cdot\exp\left(\frac{\ln x}{q}\right)}_{p\,kartų}=\underbrace{x^{\frac{1}{q}}\cdot\ldots\cdot x^{\frac{1}{q}}}_{p\,kartų}=\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p}=x^{\frac{p}{q}}.$$

Jei $\frac{p}{q}<0$, tai $-\frac{p}{q}>0$ ir $\exp\left(-\frac{p}{q}\ln x\right)=x^{-\frac{p}{q}}$,

$$\exp\left(-\frac{p}{q}\ln x\right)\exp\left(\frac{p}{q}\ln x\right)=\exp\left(-\frac{p}{q}\ln x+\frac{p}{q}\ln x\right)=\exp(0)=1,$$

$$\exp\left(\frac{p}{q}\ln x\right)=\frac{1}{\exp\left(-\frac{p}{q}\ln x\right)}=\frac{1}{x^{-\frac{p}{q}}}=x^{\frac{p}{q}}.$$

c) Dalyje (b) įrodėme, kad $\exp(r\ln x)=x^{r}$, kai r racionalus. Bet kokiam realiajam α ir racionaliųjų skaičių sekai $\{r_n\}$ su sąlyga $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\alpha$ egzistuoja riba

$$\lim_{n\to\infty}x^{r_n}=\lim_{n\to\infty}\exp(r_n\ln x)=\exp\left(\lim_{n\to\infty}r_n\ln x\right)=\exp(\alpha\ln x).$$

Todėl natūralu apibrėžti laipsninę funkciją su bet kokiu realiu laipsniu lygybe

$$x^{\alpha} = \exp(\alpha \ln x).$$

4.

a) *Naudodami matematinę indukciją apskaičiuokite funkcijos* $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ *n-tąją išvestinę.* (1 t.)

b) *Parašykite funkcijos* $f(x) = \sqrt{1+x}$ *Teiloro formulę taško* $x_0 = 0$ *aplinkoje su Lagranžo formos liekamuoju nariu* $r_n(x)$. *Susiekite Teiloro formulės koeficientus su binominiais koeficientais.* (2 t.)

c) *Įvertinkite* $r_n(x)$ *ir įrodykite, kad* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, *kai* $0 \le x \le 1$. (2 t.)

d) *Įvertinkite* $r_n(x)$ *ir įrodykite, kad* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, *kai* $-\frac{1}{2} \le x \le 0$. (2 t.)

Sprendimas.

a) Bazė. $\left((1+x)^{\alpha}\right)' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$.

$$\left((1+x)^{\alpha}\right)'' = \left(\alpha(1+x)^{\alpha-1}\right)' = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

Prielaida. $\left((1+x)^{\alpha}\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, $n \in \mathbf{N}$.

Žingsnis.

$$\left((1+x)^{\alpha}\right)^{(n+1)} = \left(\left((1+x)^{\alpha}\right)^{(n)}\right)' \qquad \text{(apibrėžimas)}$$

$$= \left(\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}\right)'. \qquad \text{(naudojamės prielaida)}$$

$$= \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}.$$

b) Parašome Teiloro formulę su Lagranžo formos liekamuoju nariu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x), \tag{14}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{15}$$

$$\left(\sqrt{1+x}\right)^{(k)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-k},$$

$$\left(\sqrt{1+x}\right)^{(k)}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-k+1\right),$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\frac{1}{2}-n-1}x^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\frac{1}{2}-n-1}x^{n+1}.$$

c) Vertinsime liekamąjį narį

$$r_n(x)=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!}(1+\xi)^{-n-\frac{1}{2}}x^{n+1}. \qquad (16)$$

Kai $0\le x\le 1$, tai $0<\xi<x$. Tada

$$\left|x^{n+1}\right|\le 1, \qquad (17)$$

$$\left(1+\xi\right)^{-n-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\left(1+\xi\right)^{n+\frac{1}{2}}}<1. \qquad (18)$$

$$\left|\binom{\frac{1}{2}}{n+1}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-n\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}\right|\le\frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n+1}. \qquad (19)$$

Iš šių trijų įverčių (17), (18), (19) gauname

$$\left|r_n(x)\right|\le\frac{1}{n+1} \qquad (20)$$

ir $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$.

d) Kai $-\frac{1}{2}\le x\le 0$, tai $-\frac{1}{2}\le x<\xi<0$. Tada

$$1+\xi>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{1+\xi}<\frac{1}{\frac{1}{2}}=2,$$

$$\left|\frac{x}{1+\xi}\right|\le 2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

$$\left|(1+\xi)^{-n-\frac{1}{2}}x^{n+1}\right|=\frac{|x|^{n+1}}{|1+\xi|^{n+\frac{1}{2}}}<\left|\frac{x}{1+\xi}\right|^{n+\frac{1}{2}}\le 1. \qquad (21)$$

Dar paėmę binominio koeficiento įvertį (19), gauname tą patį liekamojo nario $r_n(x)$ įvertį (20).

5. *Sakykime, sekos* $\{x_n\}$ *ir* $\{y_n\}$ *yra aprėžtos. Įrodykite nelygybę. Galite įrodinėti skirtigais būdais. Abu bus įvertinti.*

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n\le\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n). \qquad \text{(po 4 t.)}$$

Sprendimas. Pirmasis būdas.

Apatinė sekos riba yra mažiausioji dalinė riba. Egzistuoja toks posekis $\left\{x_{n_k}+y_{n_k}\right\}$, kad

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{k\to\infty}\left(x_{n_k}+y_{n_k}\right). \qquad (22)$$

Posekis $\left\{x_{n_k}\right\}$ gali ir nekonverguoti, bet iš jo galima išrinkti konverguojantį posekį $\left\{x_{n_{k_m}}\right\}$. Tada konverguos ir posekiai:

$\left\{x_{n_{k_m}}+y_{n_{k_m}}\right\}$ - konverguojančios sekos $\left\{x_{n_k}+y_{n_k}\right\}$ posekis,

$\left\{y_{n_{k_m}}\right\}$ - dviejų konverguojančių sekų skirtumas $y_{n_{k_m}}=\left(x_{n_{k_m}}+y_{n_{k_m}}\right)-x_{n_{k_m}}$.

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n+\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n &\le \lim_{m\to\infty} x_{n_{k_m}}+\lim_{m\to\infty} y_{n_{k_m}} && \text{(apatinės ribos mažesnės už dalines)}\\
&=\lim_{m\to\infty}\left(x_{n_{k_m}}+y_{n_{k_m}}\right) && \text{(sekų sumosriba lygi ribų sumai)}\\
&=\lim_{k\to\infty}\left(x_{n_k}+y_{n_k}\right) && \text{(posekio riba lygi sekos ribai)}\\
&=\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n) && \text{(taip parinkome posekį – (22) lygybė)}
\end{aligned}$$

Antrasis būdas. Naudosimės teorema

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n} x_k=\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\ge n} x_k\right). \tag{23}$$

$\inf_{k\ge n} x_k\le x_k, k\ge n,$ (infimumas nedidesnis už aibės elementą) (24)

$\inf_{k\ge n} y_k\le y_k, k\ge n,$ (tas pats kaip (24)) (25)

$\inf_{k\ge n} x_k+\inf_{k\ge n} y_k\le x_k+y_k, k\ge n,$ (sudedame nelygybes (24), (25))

$\inf_{k\ge n} x_k+\inf_{k\ge n} y_k\le\inf_{k\ge n}\left(x_k+y_k\right)$, (infimumas nemažesnis už bet kokį apatinį rėžį) (26)

$\lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n} x_k+\lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n} y_k\le\lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n}\left(x_k+y_k\right)$, (pereiname prie ribos (26)) (27)

$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n+\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n\le\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)$. (teorema (23))

6. *Duota didėjanti funkcija* $y=f(x), x\in(0;+\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, *ir mažėjanti funkcija* $z=g(y), y\in(-\infty;+\infty)$, $\lim_{y\to+\infty} g(y)=1$.

a) *Kam lygi riba* $\lim_{x\to+\infty} g(f(x))$? (1 t.)
b) *Įrodykite tai, naudodami nelygybių kalbą.* (3 t.)
c) *Pavaizduokite tai geometriškai viename brėžinyje.* (2 t.)
d) *Sakykime, kad funkcija* f *įgaubta, o g iškila. Ką galima pasakyti apie sudėtinės funkcijos* $z=g(f(x))$ *iškilumą?* (2 t.)
e) Sugalvokite po vieną funkcijų $y=f(x), z=g(y)$, tenkinančių užduoties sąlygas (taip pat sąlygą (d)), pavyzdį (2 t.)

Sprendimai.

a) $\lim_{x\to+\infty} g(f(x))=1$.

b) $\lim_{y\to+\infty} g(y)=1\Rightarrow\ \forall\varepsilon,\varepsilon>0,\exists\mathrm{E},\mathrm{E}>0$ toks, kad $y>\mathrm{E}\Rightarrow 1-\varepsilon<g(y)<1+\varepsilon$

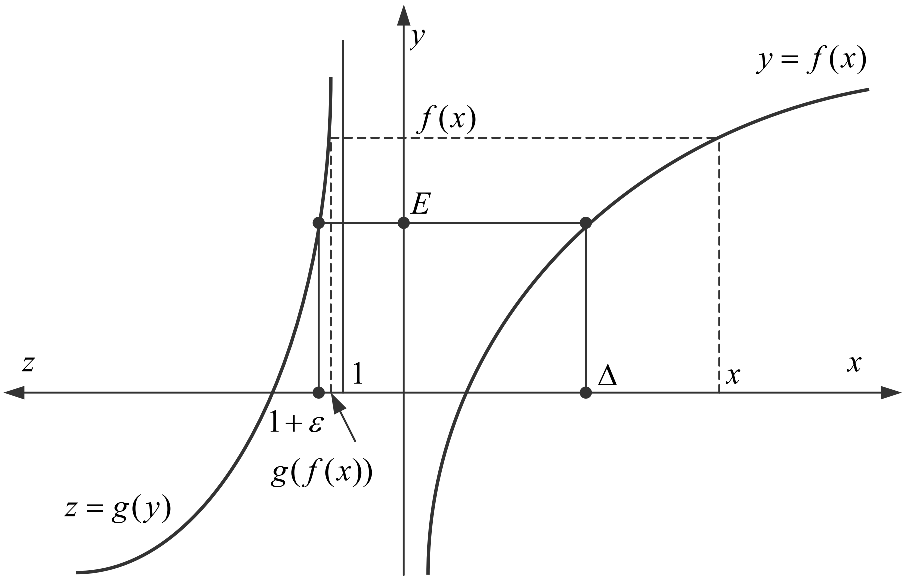
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\Rightarrow\ \mathrm{E},\mathrm{E}>0,\exists\Delta,\Delta>0,$ toks, kad $x>\Delta\Rightarrow f(x)>\mathrm{E}$

$\Rightarrow\ \forall\varepsilon(\varepsilon>0)\exists\Delta(\Delta>0)$ toks, kad

$x>\Delta\Rightarrow f(x)>E\Rightarrow 1-\varepsilon<g(f(x))<1+\varepsilon$

$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty} g(f(x))=1$.

c)



d) Reikia apskaičiuoti antrąją išvestinę

$$\big(g(f(x))\big)' = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

$$\begin{aligned}\big(g(f(x))\big)'' &= \Big(\big(g(f(x))\big)'\Big)' \\ &= \big(g'(f(x)) \cdot f'(x)\big)' \\ &= g''(f(x)) \cdot \big(f'(x)\big)^2 + g'(f(x)) \cdot f''(x).\end{aligned}$$

f – didėjanti $\Rightarrow$ $f' \geq 0$,

f – įgaubta $\Rightarrow$ $f''(x) \leq 0$,

g – mažėjanti $\Rightarrow$ $g'(y) \leq 0$,

g –iškila $\Rightarrow$ $g''(y) \geq 0$.

$\Rightarrow \big(g(f(x))\big)'' \geq 0$ $\Rightarrow$ sudėtinė funkcija $z = g(f(x))$ - iškila.

e) Paprasčiausias pavyzdys

$y = f(x) = \ln x, z = g(y) = \exp(-y) + 1,$

$$z = g(f(x)) = \exp(-\ln x) + 1 = \frac{1}{x} + 1.$$

7. *Kreivė nusakyta parametrinėmis lygtimis* $\gamma(t) = (x(t); y(t)) = (3t - t^3, (t-1)^3)$.

a) *Nubrėžkite funkcijų* $x = 3t - t^3, y = (t-1)^3$ *grafikus.* (2 t.)

b) *Nubrėžkite kreivės* γ *eskizą x, y plokštumoje.* (1 t.)

c) *Raskite kreivės asimptotes, jei egzistuoja.* (2 t.)

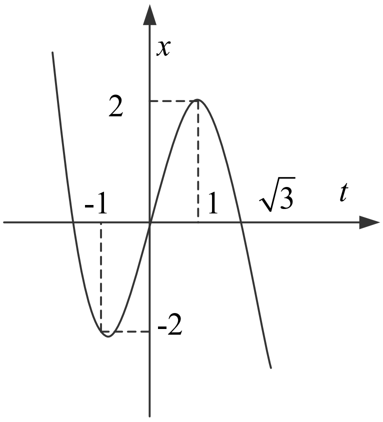
d) *Apskaičiuokite išvestinę* $y'_x(t)$. *Nustatykite kreivės* γ *charakteringus taškus.* (3 t.)

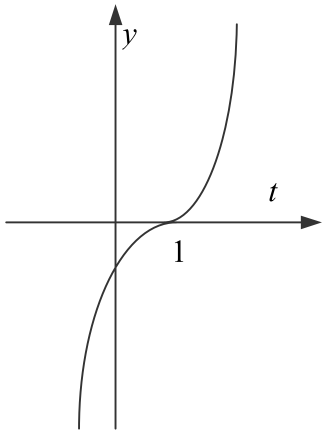
e) *Apskaičiuokite išvestinę* $y''_{xx}(t)$. *Nustatykite kreivės* γ *dalių iškilumą (įgaubtumą).* (3 t.)

f) *Patikslinkite kreivę brėžinyje.* (1 t.)

Sprendimai.

a)

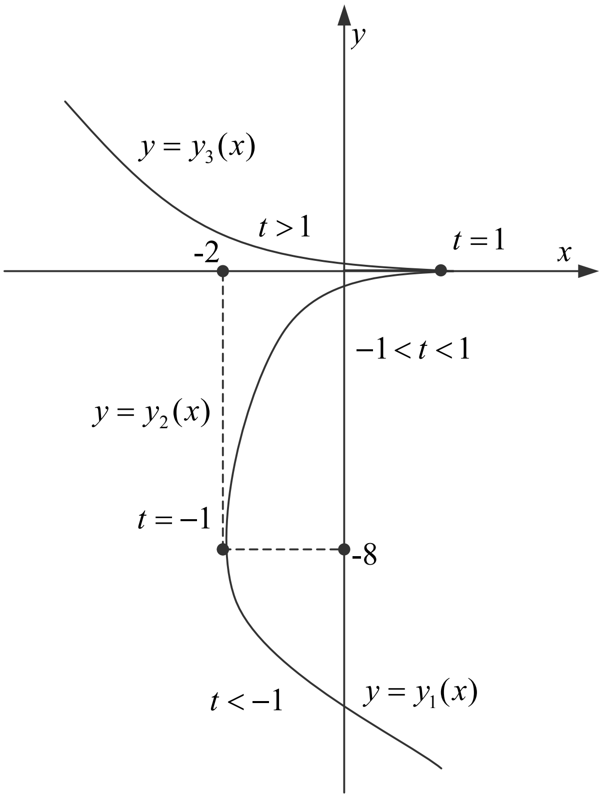




b)

Galima surasti keletą grafiko taškų

t	x	y
$-\sqrt{3}$	0	-20,3
-1	-2	-8
0	0	-1
1	2	0
$\sqrt{3}$	0	0,4
2	-5	1



c) Funkcijos $x = 3t - t^3, y = (t-1)^3$ auga į begalybę, kai t artėja į begalybę. Todėl reikia skaičiuoti ribą

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{(t-1)^3}{3t-t^3} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^3\left(1-\frac{1}{t}\right)^3}{t^3\left(\frac{3}{t^2}-1\right)} = -1 .$$

Gautoji riba baigtinė. Taigi reikia skaičiuoti kitą ribą

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left(y(t)+x(t)\right) &= \lim_{t\to\infty}((t-1)^3+(3t-t^3))\\ &= \lim_{t\to\infty}(t^3-3t^2+3t-1+3t-t^3)\\ &= \lim_{t\to\infty}(-3t^2+6t-1)\\ &= \lim_{t\to\infty}(-3t^2)(1-\frac{2}{t}+\frac{1}{3t^2}) = -\infty.\end{aligned}$$

Kadangi riba begalinė, tai asimptotė neegzistuoja.

d)

$$x'(t)=3-3t^2=3(1-t^2),\ y'(t)=3(t-1)^2,$$

$$y'_x(t)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{3(t-1)^2}{3(1-t^2)}=\frac{(1-t)^2}{(1-t)(1+t)}=\frac{1-t}{1+t}. \tag{28}$$

Kai $t<-1, y'_x(t)<0$, funkcija $y=y_1(x)$ mažėja.

Kai $-1<t<1, y'_x(t)>0$, funkcija $y=y_2(x)$ didėja.

Kai $t>1, y'_x(t)<0$, funkcija $y=y_3(x)$ mažėja.

Matematinė analizės jėga ir grožis, kad mes tų funkcijų $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ neturime, tačiau galime tirti jų elgesį, nes mokame apskaičiuoti jų išvestines. Atskirom kreivės dalim būtų skirtingos funkcijų išraiškos, o (28) išvestinės formulė tinka visoms funkcijoms (!) – keičiasi tik parametro *t* kitimo intervalai. Maple gali surasti tris funkcijas $y=y(x)$. Štai viena iš jų:

$$y=-x-7+\frac{3}{4}\left(88+56x+4x^2+4\sqrt{-16+16x-4x^3+x^4}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{3(-5-2x)}{\left(88+56x+4x^2+4\sqrt{-16+16x-4x^3+x^4}\right)^{\frac{1}{3}}}$$
$$-\frac{3}{2}i\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\left(88+56x+4x^2+4\sqrt{-16+16x-4x^3+x^4}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{2(-5-2x)}{\left(88+56x+4x^2+4\sqrt{-16+16x-4x^3+x^4}\right)^{\frac{1}{3}}}\right),$$

čia *i* – komleksinis menamasis. Ką galima veikti su tokia išraiška?

Kreivės charakteringi taškai tie, kuriuose išvestinė $y'_x(t)$ yra begalinė arba lygi nuliui. Ji begalinė, kai $t=-1$. Tada

$$x(-1)=3(-1)-(-1)^3=-3+1=-2,$$

$$y(-1)=(-1-1)^3=(-2)^3=-8.$$

Kreivė taške $(-2;-8)$ turi vertikalią liestinę.

e) Kad būtų lengviau skaičiuoti antrąją išvestinę, pirmąją išvestinę galime truputį pakeisti

$$y'_x(t)=\frac{1-t}{1+t}=\frac{-t-1+2}{1+t}=-1+\frac{2}{1+t}$$

$$y''_{xx}(t)=\left(y'_x(t)\right)'_t\cdot t'_x=\left(-1+\frac{2}{1+t}\right)'_t\cdot\frac{1}{x'_t(t)}$$

$$=-\frac{2}{(1+t)^2}\cdot\frac{1}{3(1-t^2)}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(1+t)^3(1-t)}$$

Kai $t<-1, y''_{xx}(t)>0$, kreivė (funkcija $y=y_1(x)$) iškila.

Kai $-1<t<1, y''_{xx}(t)<0$, kreivė (funkcija $y=y_2(x)$) įgaubta.

Kai $t>1, y''_{xx}(t)>0$, kreivė (funkcija $y=y_3(x)$) iškila.

f) Brėžinį patikslinti palieku patiems.

8. *Pereitame uždavinyje iš antrosios lygties galima išspręsti* $t=\sqrt[3]{y}+1$*, įstatyti tai į pirmąją lygtį ir gauti funkciją* $x=g(y)=2-y-3y^{\frac{2}{3}}$.

a) *Apskaičiuokite* $g'(y)$. *Nustatykite funkcijos g mažėjimo ir didėjimo intervalus* (2 t.)

b) *Apskaičiuokite* $g''(y)$. *Ištirkite funkcijos g iškilumą.* (2 t.)

c) *Kodėl tiesė* $x=2-y$ *nėra* $x=g(y)$ *asimptotė?* (1 t.)

d) *Nubrėžkite funkcijos* $x=g(y)$ *grafiką x, y koordinačių sistemoje.* (1 t.)

e) *Apribokime funkciją g intervale* $[-8,0]$.

i) *Raskite* $g([-8,0])$. (1 t.)

ii) *Įrodykite, kad intervale* $g([-8,0])$ *egzistuoja atvirkštinė funkcija* $y=f(x)$. (1 t.)

iii) *Ištirkite jos* (f) *tolydumą, diferencijuojamumą, monotoniškumą.*(3t)

iv) *Nustatykite funkcijos f iškilumą (įgaubtumą). Galite tai daryti skirtingais būdais.* (*Už skirtingą būdą po* 2 t.)

(*Galima užrašyti funkcijos f analizinę išraišką, bet ji užimtų dvi-tris eilutes*)

Sprendimas.

a) $$g'(y)=-1-3\cdot\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}=-\frac{\sqrt[3]{y}+2}{\sqrt[3]{y}},$$

$$-\frac{\sqrt[3]{y}+2}{\sqrt[3]{y}}=0\Leftrightarrow y=-8.$$

$$y<-8\Rightarrow\sqrt[3]{y}<0,\sqrt[3]{y}+2<0\Rightarrow g'(y)<0,$$

$$-8<y<0\Rightarrow\sqrt[3]{y}<0,\sqrt[3]{y}+2>0\Rightarrow g'(y)>0,$$

$$y>0\Rightarrow\sqrt[3]{y}>0,\sqrt[3]{y}+2>0\Rightarrow g'(y)<0.$$

Intervale (-8,0) funkcija *g* didėja, o intervaluose $(-\infty,-8)$ ir $(0,+\infty)$ - mažėja. Taškas $y=-8$ yra lokalaus minimumo taškas. Taškas $y=0$ - lokalaus maksimumo taškas. Tačiau išvestinė taške $y=0$ neegzistuoja, tiksliau

$$\lim_{y\uparrow 0}g'(y)=\lim_{y\uparrow 0}\frac{-\left(\sqrt[3]{y}+2\right)}{\sqrt[3]{y}}=+\infty,$$

$$\lim_{y\downarrow 0}g'(y)=\lim_{y\downarrow 0}\frac{-\left(\sqrt[3]{y}+2\right)}{\sqrt[3]{y}}=-\infty.$$

b) $$g''(y)=\left(-1-2y^{-\frac{1}{3}}\right)'=-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)y^{-\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}y^{-\frac{4}{3}}.$$

Funkcijos antroji išvestinė $g''(y)>0$ intervaluose $(-\infty,0)$ ir $(0,+\infty)$. Šiuose intervaluose funkcija *g* iškila. Taške $y=0$ antroji išvestinė neegzistuoja.

c) Reikia skaičiuoti ribą

$$\lim_{y\to\infty}\frac{x}{y}=\lim_{y\to\infty}\frac{2-y-3y^{\frac{2}{3}}}{y}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{2}{y}-1-3\frac{1}{y^{\frac{1}{3}}}\right)=-1 .$$

Dabar reikia skaičiuoti dar vieną ribą

$$\lim_{y\to\infty}(x+y)=\lim_{y\to\infty}\left(2-y-3y^{\frac{2}{3}}+y\right)=-\infty .$$

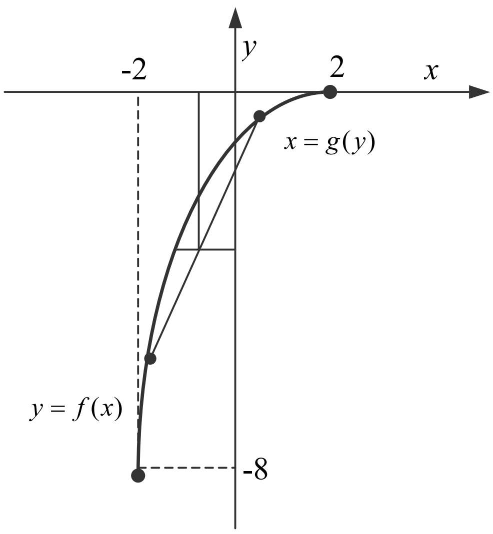
Kadangi riba begalinė, tai asimptotės nėra. Taigi ir tiesė $x=2-y$ nėra asimptotė.

d) Uždavinio sąlygoje buvo aiškiai pasakyta, kad grafiką reikia brėžti x, y koordinačių sistemoje, t.y. x-ų – horizontali ašis, o y-ų – vertikali. Nėra visiškai įprasta nepriklausomą kintamąjį atidėlioti vertikalioje ašyje. To buvo prašoma tam, kad tada funkcijos g grafikas sutaptų su 7 uždavinio kreive. Mes turime vieną objektą – kreivę, kurią aprašome dviem skirtingais būdais: parametriniu ir išreikštiniu. Bėda tik ta, kad išreikštinis nėra įprastos formos $y=f(x)$, o $x=g(y)$.

Didelė dalis studentų y-ų ašį laikė horizontalia, o x-ų – vertikalia. Už tai taškai nebuvo mažinami, bet tada, manau, daugumai studentų 7 ir 8 uždaviniai buvo nesusiję tarpusavyje.

Grafiko eskizas pereitame uždavinyje (9 psl.).

e) Nusibrėžkime funkcijos g grafiką tik intervale $[-8,0]$.



i) Funkcija g tolydi ir didėjanti intervale $[-8,0]$. Todėl vaizdas $g([-8,0])$ bus intervalas $[g(-8),g(0)]$.

$$g(-8)=2+8-3(-8)^{\frac{2}{3}}=10-3\cdot 4=-2, g(0)=2.$$

Taigi $g([-8,0])=[-2,2]$.

ii) Dalyje (a) įrodėme, kad intervale $(-8,0)$ funkcijos g išvestinė teigiama. Todėl funkcija g yra griežtai didėjanti, ir egzistuoja atvirkštinė funkcija $y=f(x), x\in[-2,2], y\in[-8,0]$.

iii) Analizės teoremos tvirtina:

Jei g tolydi ir didėjanti, tai atvirkštinė funkcija f – taip pat tolydi ir didėjanti.

Jei g diferencijuojama, tai atvirkštinė f – taip pat diferencijuojama ir

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{y}+2}, \; x = g(y) \text{ ir } y \in (-8,0).$$

iv) Galima apskaičiuoti antrąją išvestinę

$$f''(x) = \left(\frac{1}{g'(y)}\right)_y^{/} \cdot y'_x = \frac{-g''(y)}{\left(g'(y)\right)^2} \cdot \frac{1}{g'(y)} = \frac{-g''(y)}{\left(g'(y)\right)^3}.$$

Dalyse (a) ir (b) apskaičiavome, kad intervale $(-8,0)$ abi g išvestinės yra teigiamos. Taigi $f''(x)$ yra neigiama ir funkcija įgaubta. Tai įrodymas, kuris remiasi antrosios išvestinės sąlyga.
Nubrėžkime grafike stygą, jungiančią du laisvai parinktus grafiko taškus. Jei į grafiką žiūrėsime iš y-kų ašies, tai grafikas (jo dalis) bus po styga – funkcija iškila.
Jei į grafiką žiūrėsime iš x-sų ašies, tai grafikas (jo dalis) bus virš stygos – funkcija – įgaubta.

9. *Suformuluokite dvi nejudamo taško teoremas. Paaiškinkite skirtumus tarp tų teoremų (prielaidų, tvirtinimų, įrodymų). Pateikite pavyzdį, tenkinantį vienos teoremos sąlygas, bet netenkinantį kitos teoremos sąlygų.* (6 t.)

Sprendimas.

1. Nejudamo taško teorema. Jei funkcija g tenkina sąlygas:

$g: I \to I$, $I = [a;b]$ - uždaras intervalas (a ir b gali būti ir begalybės)

$$\exists q, 0 \le q < 1, \text{ kad } |g(x') - g(x'')| \le q|x' - x''|, \forall x', x'' \in I, \tag{29}$$

tai bet kokiai pradinei reikšmei $x_0, x_0 \in I$, rekurentine formule

$$x_{n+1} = g(x_n) \tag{30}$$

nusakyta seka konverguoja į vienintelį lygties

$$x = g(x) \tag{31}$$

sprendinį.

2. Teorema. Jei $g:[a;b] \to [a;b]$ tolydi funkcija, tai egzistuoja toks $c, c \in [a;b]$, kad $g(c) = c$.

Skirtumai.
Prielaidos. Pirmosios teoremos prielaida (29) yra daug stipresnė už tolydumą.
Tvirtinimai. Pirmojoje teoremoje tvirtinima, kad lygtis (31) turi vienintelį sprendinį, o antrojoje, kad sprendinys egzistuoja, bet nebūtinai vienintelis.
Įrodymai. Pirmosios teoremos įrodymas konstruktyvus, t.y. sukonstruojama seka (30), kuri konverguoja į lygties (31) sprendinį. Antroji teorema – grynai egzistencinė. Joje tik teigiama, kad (31) lygtis turi sprendinį, bet nekalbama, kaip jį surasti.

Pavyzdys. $g(x) = \sin\frac{\pi}{2}x, x \in [-1;1]$. Funkcija tenkina antrosios teoremos sąlygas, bet netenkina pirmosios. Egzistuoja trys (31) lygties sprendiniai $x = -1, x = 0, x = 1$.