**Matematinės analizės egzaminas**
**2004.01.08**

1. Įrodykite pagal apibrėžimą, kad funkcija $f(x) = x^2$ yra tolydi kiekviename taške. (2)

2. Nuo antikos laikų žinome, kad apskritimo liestinė – tai tiesė, turinti vieną bendrą tašką su apskritimu ir statmena apskritimo spinduliui.
   a) Nubrėžkite viršutiniąją apskritimo $x^2 + y^2 = 1$ dalį, pasirinkite jame tašką $(x_0; y_0)$, $0 < x_0 < 1, 0 < y_0 < 1$, per šį tašką nubrėžkite apskritimo liestinę. Parašykite liestinės lygtį, nenaudodami išvestinės. (1)
   b) Suformuluokite matematinės analizės rezultatus, kuriais remdamiesi iš apskritimo liestinės lygties, gautos dalyje (a), išvestumėte formulę $\left(\sqrt{z}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$. (3)
   c) Siūlau dalyje (b) kvadratinės šaknies funkciją (*angl.* square root) laikinai žymėti $\sqrt{z} = \mathrm{sqrt}(z)$. Kodėl taip siūlau? (1)

3.
   a) Kokių eksponentinės ir logaritminės funkcijų savybių reikia įrodyti lygybei $\exp\left(\dfrac{1}{2}\ln x\right) = \sqrt{x}$ ? Naudodamiesi šia lygybe raskite $\sqrt{x}$ išvestinę. (3)
   b) Įrodykite, kad $\exp\left(\dfrac{p}{q}\ln x\right) = x^{\frac{p}{q}}$, čia $p$, $q$ – sveikieji skaičiai, $q \neq 0$ .(3)
   c) Naudodamiesi dalies (b) rezultatu pagrįskite, kodėl natūralu apibrėžti laipsninę funkciją formule $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$, ($\alpha$ - bet koks realus)? (2)

4.
   a) Naudodami matematinę indukciją apskaičiuokite funkcijos $f(x) = (1+x)^\alpha$ $n$-tąją išvestinę. (1)
   b) Parašykite funkcijos $f(x) = \sqrt{1+x}$ Teiloro formulę taško $x_0 = 0$ aplinkoje su Lagranžo formos liekamuoju nariu $r_n(x)$. Susiekite Teiloro formulės koeficientus su binominiais koeficientais. (2)
   c) Įvertinkite $r_n(x)$ ir įrodykite, kad $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, kai $0 \le x \le 1$. (2)
   d) Įvertinkite $r_n(x)$ ir įrodykite, kad $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, kai $-\dfrac{1}{2} \le x \le 0$. (2)

5. Duota didėjanti funkcija $y = f(x), x \in (0;+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ir mažėjanti funkcija $z = g(y), y \in (-\infty;+\infty)$, $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = 1$.
   a) Kam lygi riba $\lim\limits_{x\to+\infty} g(f(x))$? (1)
   b) Įrodykite tai, naudodami nelygybių kalbą. (3)
   c) Pavaizduokite tai geometriškai viename brėžinyje. (2)

d) Sakykime, kad funkcija $f$ įgaubta, o $g$ iškila. Ką galima pasakyti apie sudėtinės funkcijos $z = g(f(x))$ iškilumą? (2)

e) Sugalvokite po vieną funkcijų $y = f(x), z = g(y)$, tenkinančių uždouties sąlygas (taip pat sąlygą (d)), pavyzdį (2)

6. Kreivė nusakyta parametrinėmis lygtimis $\gamma(t) = (x(t); y(t)) = (3t - t^3, (t-1)^3)$.

a) Nubrėžkite funkcijų $x = 3t - t^3, y = (t-1)^3$ grafikus. (2)

b) Nubrėžkite kreivės $\gamma$ eskizą $x, y$ plokštumoje. (1)

c) Raskite kreivės asimptotes, jei egzistuoja. (2)

d) Apskaičiuokite išvestinę $y'_x(t)$. Nustatykite kreivės $\gamma$ charakteringus taškus. (3)

e) Apskaičiuokite išvestinę $y''_{xx}$. Nustatykite kreivės $\gamma$ dalių iškilumą (įgaubtumą). (3)

f) Patikslinkite kreivę brėžinyje. (1)

7. Pereitame uždavinyje iš antrosios lygties galima išspręsti $t = \sqrt[3]{y} + 1$, įstatyti tai į pirmąją lygtį ir gauti funkciją $x = g(y) = 2 - y - 3y^{\frac{2}{3}}$.

a) Apskaičiuokite $g'(y)$. Nustatykite funkcijos $g$ mažėjimo ir didėjimo intervalus (2)

b) Apskaičiuokite $g''(y)$. Ištirkite funkcijos $g$ iškilumą. (2)

c) Kodėl tiesė $x = 2 - y$ nėra $x = g(y)$ asimptotė? (1)

d) Nubrėžkite funkcijos $x = g(y)$ grafiką $x, y$ koordinačių sistemoje. (1)

e) Apribokime funkciją $g$ intervale $[-8; 0]$.

i) Raskite $g([-8; 0])$. (1)

ii) Įrodykite, kad intervale $g([-8; 0])$ egzistuoja atvirkštinė funkcija $y = f(x)$. (1)

iii) Ištirkite jos (*f*) tolydumą, diferencijuojamumą, monotoniškumą. (3)

iv) Nustatykite funkcijos *f* iškilumą (įgaubtumą). Galite tai daryti skirtingais būdais. (Už skirtingą būdą po 2)

(Galima užrašyti funkcijos *f* analizinę išraišką, bet ji užimtų dvi-tris eilutes)

8. Sakykime, sekos $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ yra aprėžtos. Įrodykite nelygybę. Galite įrodinėti skirtigais būdais. Abu bus įvertinti.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n). \quad (5)$$

9. Suformuluokite dvi nejudamo taško teoremas. Paaiškinkite skirtumus tarp tų teoremų (prielaidų, tvirtinimų, įrodymų). Pateikite pavyzdį, tenkinantį vienos teoremos sąlygas, bet netenkinantį kitos teoremos sąlygų. (6)

**Pastaba.** Užduočių įvertinimus taškais egzaminų komisija gali truputį pakoreguoti. Dažniausiai padidinti užduoties vertę, jei būtų labai mažai išsprendusių arba sprendimai labai originalūs.

Paruošė R.Kudžma