Matematinės analizės kontrolinio darbo sprendimai
2003.11.08

1.

a) Apibrėžkime $\alpha = a - 1$. $\alpha > 0$, nes $a > 1$. Tada

$$a^n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2,$$

$$\frac{a^n}{n} > \frac{n(n-1)}{2n}\alpha^2 = \frac{n-1}{2}\alpha^2 > E, n > 1,$$

$$n - 1 > \frac{2E}{\alpha^2},$$

$$n > \frac{2E}{\alpha^2} + 1,$$

$$N = \frac{2E}{\alpha^2} + 1.$$

b) Padidinkime skaitiklį, sumažinkime vardiklį ir išspręskime nelygybę.

$$\frac{n-1}{n^2+2n-2} < \frac{n}{n^2+2n-2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$N = \frac{1}{\varepsilon}.$$

2.

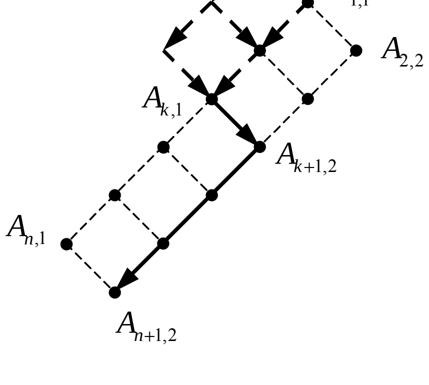
a) **Indukcinis įrodymas.** Lygybę $\sum_{k=1}^{n} P_k^1 = P_{n+1}^2$ galima įrodinėti tik indukcijos metodu.

Bazė. $n = 1$. $\sum_{k=1}^{1} P_k^1 = P_1^1 = 1 = P_2^2 = P_{1+1}^2$.

Prielaida. $\sum_{k=1}^{n} P_k^1 = P_{n+1}^2$.

Žingsnis. $\sum_{k=1}^{n+1} P_k^1 = \sum_{k=1}^{n} P_k^1 + P_{n+1}^1 = P_{n+1}^2 + P_{n+1}^1 = P_{n+2}^2 = P_{(n+1)+1}^2$.

b) **Geometrinis įrodymas.** Pavaizduokime kelius iš $A_{0,0}$ į $A_{n+1,2}$.



Iš taško $A_{0,0}$ pakliūti į tašką $A_{n+1,2}$ galima tik per taškus $A_{1,1}, A_{2,1},..., A_{n.1}$. Pasiekę tašką $A_{k,1}$, keliaukime į $A_{k+1,2}$, o po to vieninteliu tiesiu keliu iki $A_{n+1,2}$. Taip visų kelių iš $A_{0,0}$ į $A_{n+1,2}$ aibę suskaidome į nesikertančius poaibius kelių, einančių per taškus $A_{k,1}$ su fiksuotomis kelių pabaigomis. Kiekvieno tokio poaibio keliai skiriasi tik patekimu iš $A_{0,0}$ į $A_{k,1}$; jų skaičius - K_k^1. Vadinasi,

$$K_{n+1}^2 = K_n^1 + K_{n-1}^1 + ... + K_k^1.$$

c) **Algebrinis įrodymas.** Suma $B_n^1 + B_{n-1}^1 + ... + B_1^1$ yra x-so koeficientas sumoje $(1+x)^n + (1+x)^{n-1} + ... + (1+x)$, kurią mokame rasti.

$$\begin{aligned}(1+x)^n + ... + (1+x) &= \frac{(1+x)^{n+1} - (1+x)}{1+x-1} \\ &= \frac{1}{x}\left[(1+x)^{n+1} - (1+x)\right] \\ &= \frac{1}{x}(1 + B_{n+1}^1 x + B_{n+1}^2 x^2 + ... + B_{n+1}^{n+1} x^{n+1} - 1 - x) \\ &= B_{n+1}^1 - 1 + B_{n+1}^2 x + ... + B_{n+1}^{n+1} x^n.\end{aligned}$$

Taigi ieškomas x-so koeficientas yra B_{n+1}^2 ir

$$B_n^1 + B_{n-1}^1 + ... + B_1^1 = B_{n+1}^2.$$

d) **Kombinatorinis įrodymas.** Sakykime, $e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}$ - skirtingi elementai. Sudarykime iš jų visus dviejų elementų derinius. Juos suskirstykime į dvi grupes.

- Pirmajai priskirkime tuos dviejų elementų derinius, kurie turi elementą e_{n+1}. Tokių yra C_n^1.
- Likusius derinius vėl skirkime į dvi grupes. Vieną tegul sudaro deriniai, turintys elementą e_n. Tokių yra C_{n-1}^1.
- Likusius vėl skirkime į dvi grupes. Taip tęskime procesą, kol paskutiniojoje grupėje liks deriniai, turintys elementą e_2, bet nebeturintys elementų $e_{n+1}, e_n, ..., e_3$. Tokių yra C_1^1, nes prie elemento e_2 galima pridėti tik vieną likusį elementą e_1. Taigi įrodėme lygybę

$$C_{n+1}^2 = C_n^1 + C_{n-1}^1 + ... + C_1^1 = \sum_{k=1}^{n} C_k^1 .$$

e) **Aritmetinis įrodymas.** Naudosimės lygybe

$$\binom{k}{1} = k = \frac{(k+1)k}{2} - \frac{k(k-1)}{2}.$$

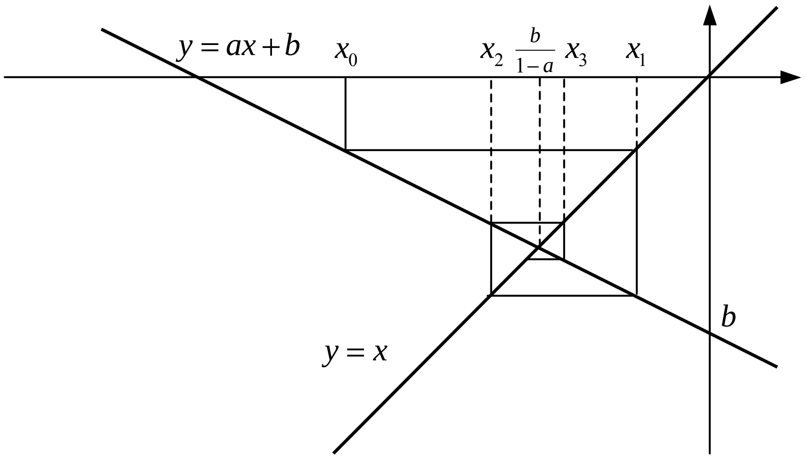
Sudėję šias lygybes, gausime

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(k+1)k}{2} - \frac{k(k-1)}{2}\right) = \frac{(n+1)n}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

3.

a) Brėžiant “voratinklį” svarbu suprasti sąlygų geometrinę prasmę:

- $-1 < a < 0$ - a yra tiesės $y = ax + b$ posvyris;
- $b < 0$ - tiesė $y = ax + b$ kerta y-kų ašį taške $(0; b)$;
- $x_0 < \dfrac{b}{1-a}$ - $\dfrac{b}{1-a}$ yra tiesių $y = ax + b$ ir $y = x$ sankirtos abscisė.



b) **Pirmasis būdas (išreikštinis).** Iš rekurentinio sekos apibrėžimo galima išvesti išreikštinę jos formą ir įrodyti indukcijos metodu.

$$x_n = a^n x_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1)$$

$$= a^n x_0 + b\frac{1-a^n}{1-a}, n = 0,1,....$$

Raskime sekos ribą

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a^n x_0 + \lim_{n\to\infty} b\frac{1-a^n}{1-a} = x_0 \lim_{n\to\infty} a^n + b\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty} a^n}{1-a} = \frac{b}{1-a}.$$

Naudojomės žinomu rezultatu $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, kai $|a| < 1$.

Antrasis būdas (nejudamo taško teorema arba Koši kriterijus).

Įvertinkime skirtumą tarp dviejų gretimų sekos narių.

$$|x_{n+1} - x_n| = |ax_n + b - (ax_{n-1} + b)| = |a||x_n - x_{n-1}|.$$

Iš sąlygos $-1 < a < 0$ išplaukia $|a| < 1$. Vadinasi, patenkinta svarbiausia nejudamo taško teoremos sąlyga. Objektai, figūruojantys šioje teoremoje, tokie: funkcija $g(x) = ax + b$, intervalas $I = (-\infty; +\infty)$. Akivaizdu, kad $g: I \to I$. Nejudamo taško teorema teigia, kad seka $\{x_n\}$ konverguoja į vienintelį lygties

$$x = ax + b$$

sprendinį $x^* = \dfrac{b}{1-a}$.

Buvo galima nesinaudoti nejudamo taško teorema, bet patikrinti Koši sąlygą ir surasti sekos ribą, t.y. pakartoti teoremos įrodymą konkrečiu atveju.

Trečiasis būdas. Posekiai. Iš “voratinklio” matyti, kad posekis $\{x_{2n}\}$ didėja, o posekis $\{x_{2n+1}\}$ mažėja. Išveskime reikalingą rekurentinę formulę

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + b = a(ax_n + b) + b = a^2 x_n + ab + b.$$

Skaičiuokime skirtumą

$$x_{2n+2} - x_{2n} = a^2 x_{2n} + ab + b - (a^2 x_{2n-2} + ab + b)$$
$$= a^2 (x_{2n} - x_{2n-2}).$$

Matome, kad skirtumai yra pastovaus ženklo. Vadinasi, posekis yra monotoniškas. Ar jis didėjantis, ar mažėjantis, priklauso nuo pirmojo skirtumo

$$\begin{aligned} x_2 - x_0 &= a^2 x_0 + ab + b - x_0 \\ &= (a^2 - 1)x_0 + b(a+1) \\ &= (a+1)(a-1)x_0 + b(a+1) \\ &= (a+1)((a-1)x_0 + b). \end{aligned}$$

Iš sąlygų $x_0 < \dfrac{b}{1-a}$ ir $-1 < a < 0$ išplaukia, kad abu daugikliai paskutiniojoje lygybėje yra teigiami. Vadinasi, posekis $\{x_{2n}\}$ yra didėjantis. Iš prielaidos $x_{2n} < \dfrac{b}{1-a}$ išplaukia

$$\begin{aligned} x_{2n+2} &= a^2 x_{2n} + ab + b \\ &< a^2 \frac{b}{1-a} + ab + b \\ &= \frac{a^2 b + ab + b - a^2 b - ab}{1-a} \\ &= \frac{b}{1-a}. \end{aligned}$$

Egzistuoja posekio $\{x_{2n}\}$ riba $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = c$, kurią randame, perėję prie ribos rekurentiniame sąryšyje $x_{2n+2} = a^2 x_{2n} + ab + b$,

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+2} = a^2 \lim_{n\to\infty} x_{2n} + ab + b,$$
$$c = a^2 c + ab + b,$$
$$c = \frac{b}{1-a}.$$

Analogiškai galima įrodyti, kad posekis $\{x_{2n+1}\}$ mažėja, aprėžtas iš apačios konstanta $\dfrac{b}{1-a}$, kuri ir yra šio posekio riba. Tačiau tai reikalauja nemažai darbo. Pabandykime pagudrauti. Parašykime formulę

$$x_{2n+1} = ax_{2n} + b.$$

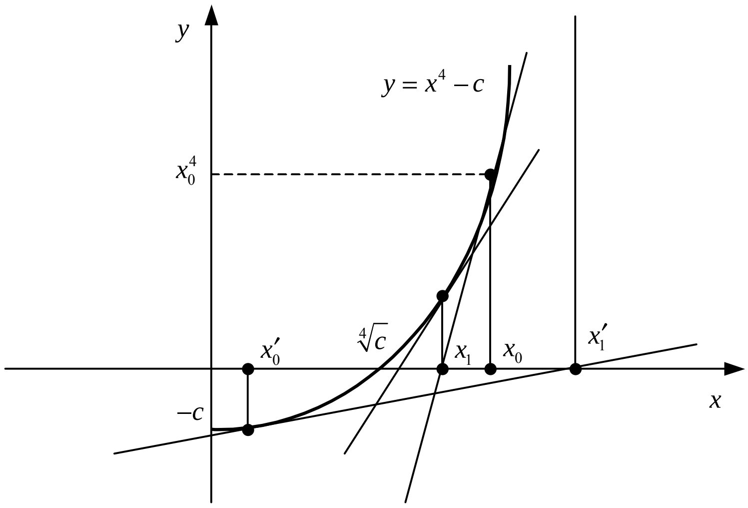
Tai nėra rekurentinis sekos $\{x_{2n+1}\}$ apibrėžimas, bet jos aritmetinė išraiška konverguojančia seka $\{x_{2n}\}$. Galime naudotis aritmetinėmis sekų ribų savybėmis

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = a \lim_{n\to\infty} x_{2n} + b = a\frac{b}{1-a} + b = \frac{ab + b - ab}{1-a} = \frac{b}{1-a}.$$

Abu posekiai $\{x_{2n}\}$ ir $\{x_{2n+1}\}$ turi ribą $\dfrac{b}{1-a}$. Vadinasi, tai yra ir visos sekos $\{x_n\}$ riba.

4.

a)



Parašykime funkcijos $f(x) = x^4 - c$ grafiko liestinės lygtį taške $(x_0; f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$
$$y = x_0^4 - c + 4x_0^3(x - x_0).$$

Ieškome liestinės ir x-sų ašies susikirtimo taško.

$$x_0^4 - c + 4x_0^3(x - x_0) = 0,$$
$$4x_0^3 x = 3x_0^4 + c,$$
$$x = \frac{1}{4}\left(3x_0 + \frac{c}{x_0^3}\right).$$

Gautą reikšmę pažymime x_1. Ir t.t., jei turime reikšmę x_n, tai sekantį sekos narį apibrėžiame

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3x_n + \frac{c}{x_n^3}\right).$$

b)

(i) Seka $\{x_n\}$ mažėdama artėja prie $\sqrt[4]{c}$.

(ii) Jei $0 < x_0^4 < c$, tai $x_1^4 > c$ arba $x_1 > \sqrt[4]{c} > x_0$. Po to seka elgiasi kaip atveju (i), t.y. mažėdama artėja prie $\sqrt[4]{c}$. Brėžinyje šie taškai pažymėti x'_0 ir x'_1. Taškas x'_2 nepažymėtas, nes funkcijos reikšmė taške x'_1 išeina iš brėžinio ribų.

c)

$$\sqrt{a_1 a_2} \le \frac{a_1 + a_2}{2},$$
$$a_1 a_2 \le \frac{(a_1 + a_2)^2}{4},$$
$$4a_1 a_2 \le a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2,$$
$$0 \le (a_1 - a_2)^2.$$

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}} \le \sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}}$$

$$\le \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}.$$

d)

(i) Indukcijos bazė.

$b_0^4 > c \Leftrightarrow b_0 > \sqrt[4]{c}$. Tai duota sąlygoje.

$$a_0 = \frac{c}{b_0^3} < \frac{c}{\left(\sqrt[4]{c}\right)^3} = \sqrt[4]{c}\,.$$

Indukcijos prielaida.

$a_n \le \sqrt[4]{c} \le b_n$.

Indukcijos žingsnis.

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}(3b_n + a_n) \ge \sqrt[4]{b_n^3 a_n} = \sqrt[4]{c}\,,$$

$$a_{n+1} = \frac{c}{b_{n+1}^3} \le \frac{c}{\left(\sqrt[4]{c}\right)^3} = \sqrt[4]{c}\,.$$

(ii) $b_{n+1} = \frac{1}{4}(3b_n + a_n) \le \frac{1}{4}(3b_n + \sqrt[4]{c}) \le \frac{1}{4}(3b_n + b_n) = b_n$.

(iii) Jei seka $\{b_n\}$ mažėjanti, tai seka $a_n = \frac{c}{b_n^3}$ didėjanti.

(iv) $b_1 - a_1 = \frac{1}{4}(3b_0 + a_0) - a_1 \le \frac{1}{4}(3b_0 + a_0) - a_0 = \frac{3}{4}(b_0 - a_0)$,

Prielaida: $b_n - a_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n (b_0 - a_0)$.

Žingsnis.

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{4}(3b_n + a_n) - a_{n+1} \le \frac{1}{4}(3b_n + a_n) - a_n = \frac{3}{4}(b_n - a_n)$$

$$\le \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n (b_0 - a_0) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} (b_0 - a_0).$$

(v) Dalyse (i) ir (ii) įrodėme sekos $\{b_n\}$ aprėžtumą ir monotoniškumą. Todėl egzistuoja $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$. Pereikime prie ribos lygybėje

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3b_n + a_n\right) = \frac{1}{4}\left(3b_n + \frac{c}{b_n^3}\right).$$

$$\beta = \frac{1}{4}\left(3\beta + \frac{c}{\beta^3}\right),$$

$$\beta = \sqrt[4]{c}\,.$$

5.

a) Duota:
   (i) Monotoniškų sekų teoremos prielaida – monotoniška aprėžta seka $\{x_n\}$.
   (ii) Teisingas Koši kriterijus.

b) Įrodyti: Monotoniškų sekų teoremos tvirtinimą - $\exists \lim_{n\to\infty} x_n$.

c)
   (i) Įrodyti, kad seka $\{x_n\}$ tenkina Koši sąlygą.
   (ii) Pasinaudoti Koši kriterijumi - $\exists \lim_{n\to\infty} x_n$.
   (iii) Šiuo konkrečiu atveju (iii) dalies nebereikia, nes jau viskas įrodyta (ii) dalyje ($\exists \lim_{n\to\infty} x_n$).

d) Laikykime, kad seka yra didėjanti ir aprėžta iš viršaus konstanta M, t.y. $x_n \le x_{n+1}$ ir $x_n \le M, \forall n$. Sakykime, kad seka netenkina Koši sąlygos. Tada $\exists \varepsilon, \varepsilon > 0, \forall N, \exists n, n > N, \exists m, m > N,\ |x_n - x_m| \ge \varepsilon$.

   Paimkime $N = 1$. $\exists n_1, m_1; m_1 > n_1 > 1, |x_{m_1} - x_{n_1}| = x_{m_1} - x_{n_1} \ge \varepsilon$; Tada

   $x_{m_1} = x_{m_1} - x_{n_1} + x_{n_1} \ge \varepsilon + x_{n_1} \ge \varepsilon + x_1$.

   Imkime $N = m_1$. $\exists n_2, m_2; m_2 > n_2 > m_1, |x_{m_2} - x_{n_2}| = x_{m_2} - x_{n_2} \ge \varepsilon$ ir

   $x_{m_2} = x_{m_2} - x_{n_2} + x_{n_2} \ge \varepsilon + x_{n_2} \ge \varepsilon + x_{m_1} \ge \varepsilon + \varepsilon + x_1 = 2\varepsilon + x_1$.

   Suformuluokime hipotezę (indukcijos prielaidą):

   $\exists x_{m_k}$, $x_{m_k} \ge k\varepsilon + x_1$.

   Indukcijos žingsnis.

   Imkime $N = m_k$. Tada

   $\exists n_{k+1}, m_{k+1}; m_{k+1} > n_{k+1} > m_k, |x_{m_{k+1}} - x_{n_{k+1}}| = x_{m_{k+1}} - x_{n_{k+1}} \ge \varepsilon$

   ir

$$
\begin{aligned}
x_{m_{k+1}} &= x_{m_{k+1}} - x_{n_{k+1}} + x_{n_{k+1}} \\
&\ge \varepsilon + x_{n_{k+1}} \\
&\ge \varepsilon + x_{m_k} \\
&\ge \varepsilon + k\varepsilon + x_1 \\
&= (k+1)\varepsilon + x_1.
\end{aligned}
$$

   Sukonstravome sekos $\{x_n\}$ posekį $\{x_{m_k}\}$, kuris neaprėžtas iš viršaus, nes $\lim_{k\to\infty}(k\varepsilon + x_1) = +\infty$. Tai prieštarauja sekos aprėžtumui. Vadinasi, prielaida, kad seka netenkina Koši sąlygos neteisinga.