

**Matematinės analizės kontrolinis darbas**  
**2003.11.08**

1. Įrodykite pagal apibrėžimą (įvertinkite seką ir suraskite  $N$ ):

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = +\infty, a > 1.$  (3 t.)

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2 + 2n - 2} = 0$  (3 t.)

2. Naudodamiesi skirtingais binominių koeficientų apibrėžimais, bet **nesinaudodami jų tarpusavio lygybe**, įrodykite lygybes

$$\sum_{k=1}^n P_k^1 = P_{n+1}^2, \sum_{k=1}^n K_k^1 = K_{n+1}^2, \sum_{k=1}^n B_k^1 = B_{n+1}^2, \sum_{k=1}^n C_k^1 = C_{n+1}^2, \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} \quad (\text{po } 3 \text{ t.})$$

3. Seka nusakyta sąryšiu  $x_{n+1} = ax_n + b, n = 0, 1, \dots, x_0 < \frac{b}{1-a}, -1 < a < 0, b < 0.$

a) Nubrėškite sekos "voratinklį". (1 t.)

b) Įvairiais metodais raskite sekos ribą. (po 3 t.)

4. Ketvirto laipsnio šaknies iš skaičiaus  $c, c > 0$ , algoritmas.

a) Nubrėškite funkcijos  $f(x) = x^4 - c$  grafiko eskizą. Paimkite  $x_0, x_0^4 > c.$

Naudodami Niutono liestinių algoritmą lygčiai  $x^4 - c = 0$  spręsti, raskite seką

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} \left( 3x_n + \frac{c}{x_n^3} \right), n = 0, 1, \dots \quad (3 \text{ t.})$$

b) Ką galite pasakyti iš brėžinio:

(i) apie sekos  $\{x_n\}$  elgesį ( $x_0^4 > c$ )? (1 t.)

(ii) kaip pasikeistų sekos  $\{x_n\}$  elgesys, jei  $0 < x_0^4 < c$ ? (1 t.)

c) Įrodykite  $\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n), a_k > 0, k = 1, \dots, n$ , kai  $n = 2$  ir  $4.$  (2 t.)

d) Iš sekos, gautos dalyje (a), padarykime dvi sekas:

$$b_0 = x_0, a_0 = \frac{c}{b_0^3}, \dots, b_{n+1} = \frac{1}{4}(3b_n + a_n), a_{n+1} = \frac{c}{b_{n+1}^3}.$$

Įrodykite:

(i)  $a_n \leq \sqrt[4]{c} \leq b_n, \forall n.$  (3 t.)

(ii) Seka  $\{b_n\}$  mažėjanti. (1 t.)

(iii) Seka  $\{a_n\}$  didėjanti. (1 t.)

(iv) Įvertinkite skirtumus  $b_n - a_n.$  (3 t.)

(v) Įrodykite sekos  $\{b_n\}$  ribos egzistenciją ir raskite ją. (1 t.)

5. **Teiginys.** Jei teisingas Koši kriterijus, tai teisinga monotoniškų ir aprėztų sekų teorema (laikykite, kad monotoniška seka didėjanti).

Suformuluokite:

a) kas duota; (2 t.)

b) ką reikia įrodyti; (1 t.)

c) kas turėtų būti daroma įrodymo (i) pirmoje; (ii) antroje ir (iii) trečioje dalyse. (po 1 t.)

d) Paneikite (c,i) tvirtinimą ir gaukite prieštarą sąlygai (a). (5 t.)