4 egzaminas

1. *Duota lygtis*:

$$ydx + (y^3 - x)dy = 0 .$$

a) *Suraskite integruojantį daugiklį* μ (*x arba y funkciją*).

Patikriname būtinąją sąlygą, kad lygtis būtų pilno diferencialo lygtimi.

$$P = y, Q = y^3 - x ,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \frac{\partial Q}{\partial x} = -1, \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Jei funkcija

$$\psi = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P(x,y)} = \frac{-1-1}{y} = -\frac{2}{y}$$

yra tik kintamojo *y* funkcija, tai integruojantįjį daugiklį μ galima rasti suintegruojant

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \psi(y)dy = -\int \frac{2}{y}dy,$$

$$\ln|\mu| = -2\ln|y| + \ln C,$$

$$\mu = \frac{C}{y^2}.$$

b) *Kokioje srityje (srityse) forma* $\varpi = \mu ydx + \mu(y^3 - x)dy$ *tenkina Puankare teoremos sąlygas*?

Padauginame pradinę lygtį iš integruojančio daugiklio

$$\varpi = \frac{1}{y^2}ydx + \frac{1}{y^2}(y^3 - x)dy = \frac{1}{y}dx + \left(y - \frac{x}{y^2}\right)dy .$$

Patikriname dalines išvestines.

$$P_1(x,y) = \frac{1}{y}, Q_1(x,y) = y - \frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}, \frac{\partial Q_1}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}, \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}.$$

Funkcijos P_1, Q_1 apibrėžtos srityse $D_1 = \{(x;y), y > 0\}, D_2 = \{(x;y), y < 0\}$, kurios abi yra žvaigždinės.

c) *Naudodami kreivinius integralus, suraskite funkciją* $u(x;y)$, *kad* $du = \varpi$.

Galima taikyti gatavą formulę

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P_1(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q_1(x,t)dt$$
$$= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y_0} dt + \int_{y_0}^{y} \left(t - \frac{x}{t^2} \right) dt$$
$$= \frac{x}{y_0} - \frac{x_0}{y_0} + \left(\frac{t^2}{2} + \frac{x}{t} \right) \Bigg|_{y_0}^{y}$$
$$= \frac{x}{y_0} - \frac{x_0}{y_0} + \frac{y^2}{2} + \frac{x}{y} - \frac{y_0^2}{2} - \frac{x}{y_0}$$
$$= \frac{y^2}{2} + \frac{x}{y} + C.$$

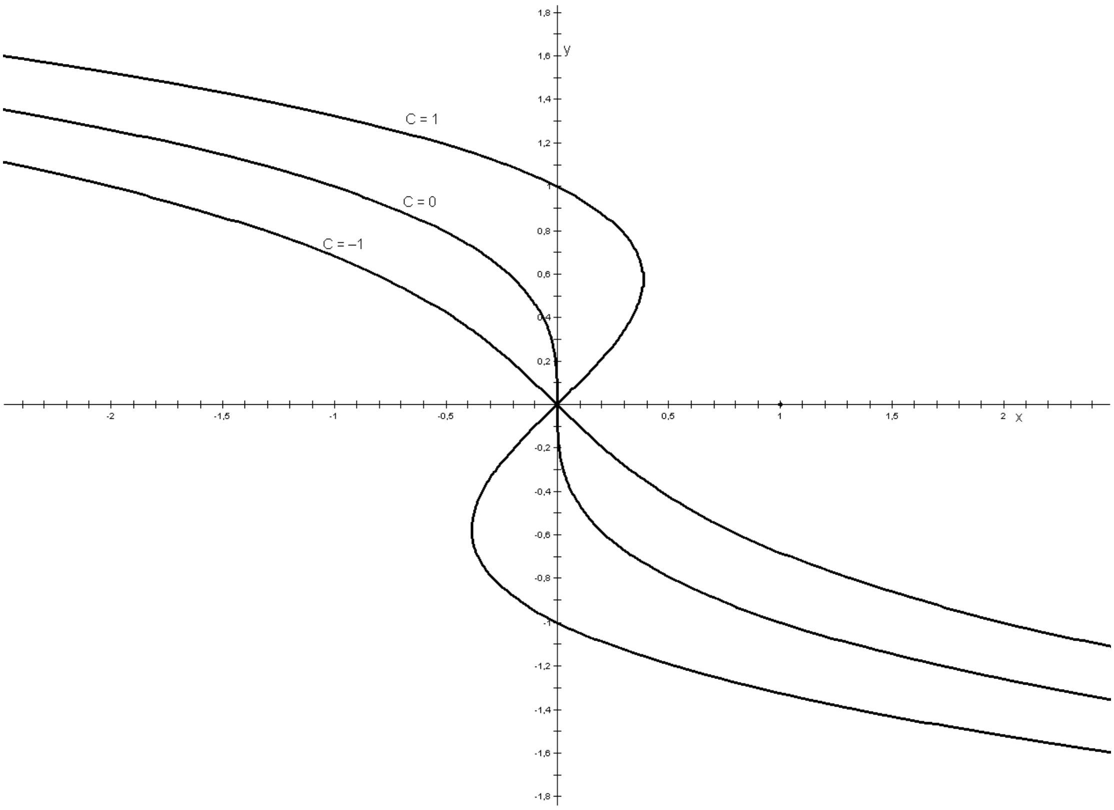
d) *Jei nesugebate atlikti dalies* (c), *tai suraskite funkciją u kitaip*.

Žinant, kad $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}, \frac{\partial u}{\partial y} = y - \frac{x}{y^2}$, galima mintinai suintegruoti ir parašyti $u = \frac{x}{y} + \frac{y^2}{2}$.

e) *Nubrėžkite lygties fazinį portretą*.

Jei turime diferencialinės lygties integralą, t.y. funkciją $u(x, y)$, tai diferencialinės lygties portretas yra funkcijos *u* portretas. Taigi reikia nupiešti šeimą lygio linijų

$$\frac{x}{y} + \frac{y^2}{2} + C,$$
$$x = Cy - \frac{y^3}{2}.$$



f) *Paaiškinkite, kaip iš lygties* $ydx + (y^3 - x)dy = 0$ *gaunama sistema* $\begin{cases} x' = x - y^3, \\ y' = y \end{cases}$? *Kuo skiriasi diferencialinės lygties iš* (e) *ir lygčių sistemos faziniai portretai*?

Diferencialinę lygtį galima pertvarkyti

$$ydx = (x - y^3)dy,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - y^3}.$$

Jei ieškotume sprendinio parametrine forma $x(t), y(t)$, tai žinodami išvestinių sąryšius

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

iš diferencialinės lygties gautume sistemą

$$\begin{cases} x' = x - y^3, \\ y' = y. \end{cases}$$

Faziniai portretai sutaptų, tik sistemos trajektorijoms galima priskirti kryptis.

g) *Suradę sistemos*

$$\begin{cases} x' = x - y^3, x(0) = x_0, \\ y' = y, y(0) = y_0 \end{cases}$$

antros lygties sprendinį, *pirmąją lygtį išspręskite konstantų varijavimo metodu.*

Antrosios lygties sprendinys $y = y_0 e^t$. Įstatome jį į pirmąją lygtį ir sprendžiame

$$x' = x - y_0^3 e^{3t}.$$

Sprendžiame homogeninę lygtį

$$x' = x.$$

Jos sprendinys $x = Ce^t$. Laikome, kad C priklauso nuo t.

$$x' = C'e^t + Ce^t,$$

$$C'e^t + Ce^t = Ce^t - y_0^3 e^{3t}$$

$$C'e^t = -y_0^3 e^{3t}$$

$$C' = -y_0^3 e^{2t}$$

$$C(t) = -\frac{y_0^3}{2} e^{2t} + C.$$

Taigi

$$x(t) = \left(-\frac{y_0^3}{2} e^{2t} + C \right) e^t,$$

$$x(0) = x_0 = -\frac{y_0^3}{2} + C,$$

$$C = x_0 + \frac{y_0^3}{2},$$

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{y_0^3}{2} \right) e^t - \frac{y_0^3}{2} e^{3t}.$$

h) *Patikrinkite, kad sistemos iš* (g) *sprendinys tenkina sąlygą* $u(x(t); y(t)) = u(x_0; y_0)$.

Skaičiuojame

$$u(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x}{y},$$

$$u(x(t), y(t)) = \frac{y_0^2 e^{2t}}{2} + \frac{1}{y_0 e^t} \left(x_0 + \frac{y_0^3}{2} - \frac{y_0^3}{2} e^{2t} \right) e^t$$

$$= \frac{y_0^2 e^{2t}}{2} + \frac{x_0}{y_0} + \frac{y_0^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} e^{2t}$$

$$= \frac{x_0}{y_0} + \frac{y_0^2}{2} = u(x_0, y_0).$$

i) *Patikslinkite dalies* (e) *fazinį portretą.*

Jei $y_0 > 0$, tai

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} y_0 e^t = +\infty,$$

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(\left(x_0 + \frac{y_0^3}{2} \right) e^t - \frac{y_0^3}{2} e^{3t} \right) = -\infty .$$

Jei $y_0 < 0$, tai ribų ženklai būtų priešingi. Lygties portrete galima pripiešti rodykles, vedančias link begalybių.

2. *Duota kreivių šeima* $y - 1 = (x + C)^2$.

a) *Išveskite gaubtinės lygtį.*

Kreivių šeimos $F(x, y, C) = 0$ gaubtinę nusako lygčių sistema

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial C}(x, y, C) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + C)^2 - y + 1 = 0, \\ 2(x + C) = 0, \end{cases}$$

$$y = 1.$$

b) *Užrašykite ir patikrinkite sąlygą, garantuojančią gaubtinės ir kreivių šeimos liestinių bendrumą gaubtinės taškuose.*

Sąlyga, garantuojanti gaubtinės ir kreivių šeimos liestinių bendrumą yra

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial C} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial C} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tikriname sąlygą

$$\begin{vmatrix} 2(x+C) & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

c) *Išveskite kreivių šeimos diferencialinę lygtį.*

$$y = 1 + (x+C)^2,$$
$$y' = 2(x+C),$$
$$x + C = \pm\sqrt{y-1},$$
$$y' = \pm 2\sqrt{y-1},$$
$$y'^2 = 4(y-1).$$

d) *Suraskite lygties* $y' = 2\sqrt{y-1}$ *bendrąjį sprendinį.*

$$y' = 2\sqrt{y-1},$$
$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y-1},$$
$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y-1}} = dx,$$
$$\sqrt{y-1} = x + C.$$

e) *Kuo skiriasi kreivių šeima, nusakyta lygties* $y' = 2\sqrt{y-1}$ *bendruoju sprendiniu, nuo kreivių šeimos* $y - 1 = (x+C)^2$? *Kodėl?*

Diferencialinės lygties sprendiniai $\sqrt{y-1} = x + C$ sudaro tik dešiniąją pusę parabolių $y - 1 = (x+C)^2$. Visą parabolių šeimą aprašytų dvi lygtys $y' = 2\sqrt{y-1}$, $y' = -2\sqrt{y-1}$.

f) *Suraskite lygties* $y' = 2\sqrt{y-1}$ *ypatingąjį sprendinį.*

Lygties ypatingasis sprendinys $y = 1$.

g) *Patikrinkite Lipšico sąlygą y atžvilgiu funkcijai* $f(x;y) = \sqrt{y-1}$ *srityje* $y \geq 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0$.

Galime taikyti Lagranžo teoremą

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,c)\right|\cdot\left|y_1-y_2\right|,\ c\in(y_1,y_2).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{y-1}},$$

$$\frac{1}{2\sqrt{y-1}}\le\frac{1}{2\sqrt{1+\varepsilon-1}}=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}},y\ge 1+\varepsilon$$

$$\left|\sqrt{y_1-1}-\sqrt{y_2-1}\right|\le\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\left|y_1-y_2\right|,y\ge 1+\varepsilon.$$

h) *Įrodykite, kad funkcija $f(x;y)=\sqrt{y-1}$ srityje $y\ge 1$ netenkina Lipšico sąlygos y atžvilgiu.*

Tai galima įrodyti netiesiogiai. Jei funkcija $f(x;y)=\sqrt{y-1}$ tenkintų srityje $y\ge 1$ Lipšico sąlygą, tai diferencialinė lygtis $y'=2\sqrt{y-1}$ su bet kokia pradine sąlyga $(x_0;y_0)$, $y_0\ge 1$, turėtų vienintelį sprendinį. Tačiau per tašką $(x_0;1)$ eina be galo daug integralinių kreivių

$$y(x)=\begin{cases}1,x\le x_1,x_1>x_0,\\ 1+(x-x_1)^2,x\ge x_1.\end{cases}$$

3. *Duota diferencialinė lygtis $y''+2y'+y=e^{-t}$.*
   a) *Naudodami Laplaso transformaciją, raskite homogeninės lygties $y''+2y'+y=0$ sprendinius, tenkinančius sąlygas $y_1(0)=1,y_1'(0)=0;y_2(0)=0,y_2'(0)=1$.*

Randame diferencialinės lygties Laplaso transformaciją.

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2sY(s)-2y(0)+Y(s)=0.$$

Bus du atvejai

I. $s^2Y_1(s)-s+2sY_1(s)-2+Y_1(s)=0$,

$$Y_1(s)=\frac{s+2}{(s+1)^2}=\frac{(s+1)+1}{(s+1)^2}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2},$$

$$y_1(t)=e^{-t}+te^{-t}.$$

II. $s^2Y_2(s)-1+2sY_2(s)+Y_2(s)=0$,

$$Y_2(s)=\frac{1}{(s+1)^2},$$

$$y_2(t)=te^{-t}.$$

b) *Parašykite trečios eilės poliaus apibrėžimą. Išveskite reziduumo formulę trečios eilės poliui.*

Vienas iš galimų apibrėžimų:
Sakysime, kad funkcija turi trečios eilė polių taške *a*, jei jos Lorano eilutė taško *a* pradurtoje aplinkoje turi tokią išraišką

$$f(z)=\frac{a_{-3}}{(z-a)^3}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+\ldots,\ a_{-3}\neq 0 .$$

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=a_{-1} .$$

Norint rasti funkcijos reziduumą, reikia padauginti funkciją iš $(z-a)^3$, dukart išdiferencijuoti ir pereiti prie ribos, kai $z\to a$.

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}\frac{1}{2!}(f(z)(z-a)^3)''=a_{-1} .$$

c) *Parašykite funkcijos* e^{tz} *skleidinį* $z+1$ *laipsniais.*

$$e^{tz}=e^{t(z+1)-t}=e^{-t}e^{t(z+1)}=e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(z+1)^n .$$

d) *Naudodami Laplaso transformciją, raskite nehomogeninės lygties* $y''+2y'+y=e^{-t}$ *sprendinį, tenkinantį sąlygą* $y_0(0)=0, y_0'(0)=0$. *Atvirkštinę Laplaso transformaciją ieškokite, taikydami kompleksinio kintamojo integravimą. Siūlau reziduumus skaičiuoti naudojant dalies (c) skleidinį.*

Parašome pagalbinę lygtį

$$s^2Y_0(s)+2sY_0(s)+Y_0(s)=\frac{1}{s+1},$$

$$Y_0(s)=\frac{1}{(s+1)^3} .$$

$$y_0(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}Y_0(z)e^{tz}dz$$

$$=\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{e^{tz}}{(z+1)^3}$$

$$=\lim_{z\to-1}\frac{1}{2}(e^{tz})''=\lim_{z\to-1}\frac{t^2e^{tz}}{2}=\frac{t^2e^{-t}}{2}.$$

Iš eksponentės skleidinio gautume

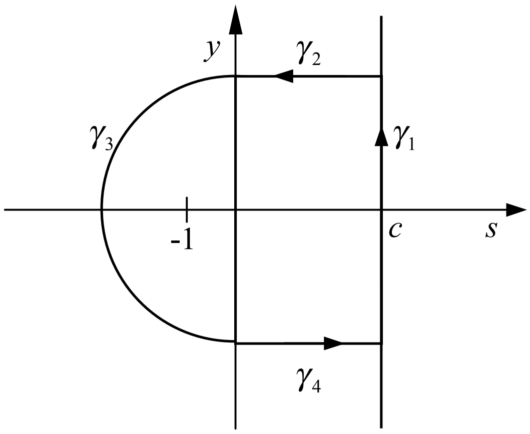
$$\frac{e^{tz}}{(z+1)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^ne^{-t}}{n!}(z+1)^{n-3} .$$

Kai $n=2$, gauname $a_{-1}=\dfrac{t^2e^{-t}}{2}$.

e) *Pagrįskite dalies* (d) *skaičiavimus, nubrėždami integravimo kontūrą ir įvertindami reikiamus integralus.*

Nubrėžkime integravimo kontūrą ir parametrizuokime kelius.

$$\gamma_1(y)=c+iy, -R\le y\le R,$$
$$\gamma_2^-(s)=s+iR, 0\le s\le c,$$
$$\gamma_3(\varphi)=Re^{i\varphi}, \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2},$$
$$\gamma_4(s)=s-iR, 0\le s\le c.$$



Apibrėžkime kontūrą $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$. Jo viduje yra tik vienas funkcijos $\frac{e^{tz}}{(z+1)^3}$ ypatingas taškas $z=-1$. Tai trečios eilės polius. Taikome reziduumų teoremą.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{tz}}{(z+1)^3}dz=\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{e^{tz}}{(z+1)^3}.$$

Skaičiuosime integralus kiekvienu keliu atskirai.

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{e^{tz}}{(z+1)^3}dz=\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}Y_0(z)e^{tz}dz=y_0(t).$$

Kitus integralus įvertinsime. Visur laikysime, kad $t>0$. Pradžiai keliu γ_2.

$$\left|\int_{\gamma_2}\frac{e^{tz}}{(z+1)^3}dz\right|=\left|-\int_{\gamma_2^-}\frac{e^{tz}}{(z+1)^3}dz\right|$$
$$\le\int_0^c\left|\frac{e^{t(s+iR)}}{(s+iR+1)^3}\right|ds$$
$$\le\int_0^c\frac{e^{tc}}{R^3}ds$$
$$=\frac{e^{tc}R}{R^3}=\frac{e^{tc}}{R^2}\to0, R\to+\infty.$$

Visiškai analogiškai įvertintume integralą keliu γ_4. Vertinkime integralą keliu γ_3.

$$\left|\int_{\gamma_3}\frac{e^{tz}}{(z+1)^3}dz\right|=\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{e^{tRe^{i\varphi}}iRe^{i\varphi}}{\left(1+Re^{i\varphi}\right)^3}d\varphi\right|$$
$$\le\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\left|e^{tR(\cos\varphi+i\sin\varphi)}iRe^{i\varphi}\right|}{\left|1+Re^{i\varphi}\right|^3}d\varphi$$
$$\le\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{e^{tR\cos\varphi}R}{(R-1)^3}d\varphi$$
$$\le\frac{R\pi}{(R-1)^3}\to0, R\to+\infty.$$

Rašydami nelygybę $e^{tR\cos\varphi}\le1$, naudojomės tuo, kad $\cos\varphi\le0$, kai $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}$.

f) *Užrašykite nehomogeninės lygties bendrąjį sprendinį.*

Bendrojo sprendinio išraiška

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_0(t)$$

$$= C_1(e^{-t} + te^{-t}) + C_2 te^{-t} + \frac{t^2}{2} e^{-t},$$

čia C_1, C_2 - bet kokios konstantos. Žinoma, bendrasis sprendinys gali būti ir kitoks

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t} + \frac{t^2}{2} e^{-t}.$$

g) *Raskite nehomogeninės lygties sprendinį su pradine sąlyga* $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Įstatome pradines sąlygas

$$1 = y(0) = C_1 y_1(0) + C_2 y_2(0) + y_0(0) = C_1,$$

$$1 = y'(0) = C_1 y_1'(0) + C_2 y_2'(0) + y_0'(0) = C_2.$$

Atsakymas: $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_0(t) = e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{t^2}{2} e^{-t}$.

4. *Duota diferencialinė lygtis* $y'' + 2y' + y = 0$.

a) *Keitiniu* $y' = x$ *diferencialinę lygtį suveskite į sistemą* $\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = x. \end{cases}$.

Pažymėkime $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Jei $y' = x$, tai $y'' = x'$. Įstatome tai į duotąją diferencialinę lygtį

$$x' + 2x + y = 0,$$

$$x' = -2x - y.$$

Gavome pirmos eilės tiesinių diferencialinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = x. \end{cases}$$

b) *Suraskite matricą D, suvedančią matricą A į kanoninę Žordano formą* $J = D^{-1}AD$.

Ieškome matricos *A* tikrinių reikšmių.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -1.$$

Ieškome matricos *A* tikrinių vektorių $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$

$$(A - \lambda E)\xi = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -2+1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_1 - \xi_2 \\ \xi_1 + \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gauname vieną nepriklausomą lygtį $\xi_1 + \xi_2 = 0$ ir tikrinių vektorių vienmatį poerdvį, generuotą vektoriaus $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Imame vektorių, kuris nėra tikrinis vektorius, $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Randame vektorių

$$\eta_1 = (A - \lambda E)\eta_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sudarome matricą $D = (\eta_1\, \eta_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Randame atvirkštinę matricą

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Skaičiuojame

$$\begin{aligned} D^{-1}AD &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J. \end{aligned}$$

c) *Pažymėję* $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $z = Dw$, *gaukite sistemą* $w' = Jw$.

Įstatykime naujus kintamuosius w į lygtį

$$z' = Az,$$
$$Dw' = ADw,$$
$$w' = D^{-1}ADw = Jw.$$

d) *Išspręskite* (*kokiu norite būdu*) *sistemą* $w' = Jw$ *su pradinėm sąlygom* $u(0) = u_0, v(0) = v_0$.

Parašome trikampę diferencialinių lygčių sitemą

$$\begin{cases} u' = -u + v, \\ v' = -v. \end{cases}$$

Antrosios lygties sprendinys $v(t) = v_0 e^{-t}$. Sprendžiame pirmąją

$$u' = -u + v_0 e^{-t}.$$

Homogeninės lygties $u' = -u$ sprendinys $u = Ce^{-t}$. Laikydami $C = C(t)$, išvedame jai diferencialinę lygtį

$$C'e^{-t}+(-Ce^{-t})=-Ce^{-t}+v_0e^{-t},$$
$$C'e^{-t}=v_0e^{-t},$$
$$C'=v_0,$$
$$C(t)=v_0t+C,$$
$$u(t)=(v_0t+C)e^{-t},$$
$$u_0=u(0)=C,$$
$$u(t)=(v_0t+u_0)e^{-t}.$$

e) <u>*Nubrėžkite sistemos iš*</u> (d) *dalies fazinę diagramą* $(u;v)$ *koordinačių sistemoje.*

$$\begin{cases} u=u_0e^{-t}+v_0te^{-t}, \\ v=v_0e^{-t}. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad

$$\lim_{t\to+\infty}u(t)=\lim_{t\to+\infty}v(t)=0.$$

Jei $v_0=0$, tai $v(t)=0,\forall t$, o $u(t)=u_0e^{-t}\to 0, t\to+\infty$. Jei $v_0\neq 0$, tai iš funkcijos *v* išraiškos galima išspręsti *t* ir įstatyti į funkcijos *u* išraišką.

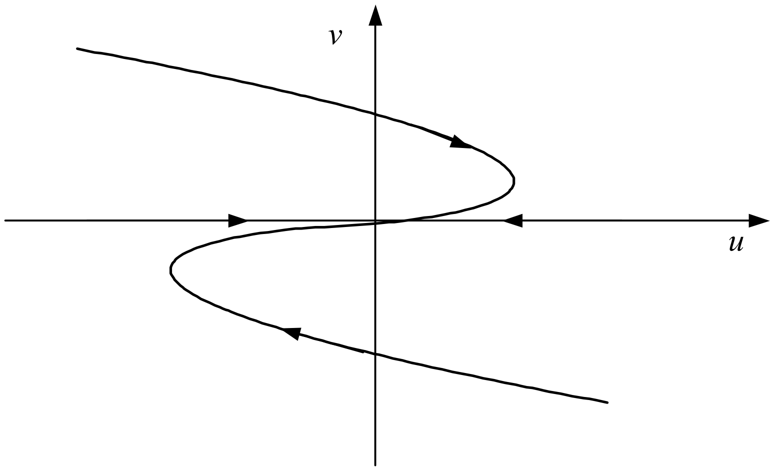
$$t=-\ln\frac{v}{v_0},$$
$$u=\frac{u_0}{v_0}v-v\ln\frac{v}{v_0}.$$

Jei $v_0>0$, tai funkcija *u* apibrėžta teigiamiem *v*, jei $v_0<0$, tai – neigiamiem.

Randame funkcijos $u=u(v)$ išvestinę

$$u'=\frac{u_0}{v_0}-\ln\frac{v}{v_0}-v\frac{v_0}{v}\frac{1}{v_0}=\frac{u_0}{v_0}-1-\ln\frac{v}{v_0}.$$
$$v_0>0,\lim_{v\downarrow 0}u'(v)=\lim_{v\downarrow 0}\left(\frac{u_0}{v_0}-1-\ln\frac{v}{v_0}\right)=+\infty,$$
$$v_0<0,\lim_{v\uparrow 0}u'(v)=\lim_{v\uparrow 0}\left(\frac{u_0}{v_0}-1-\ln\frac{v}{v_0}\right)=+\infty.$$

Trajektorijos artėja prie taško $(0;0)$ liesdamos *u* ašį.



Brėžinyje nubrėžta tik viena kreivė (tiksliau dvi).

f) *Įvardinkite pusiausvyros tašką* $(0;0)$.

Taškas $(0;0)$ yra asimptotiškai stabilus išsigimęs mazgas.

5. *Koši integralinė fomulė.*
   a) *Suformuluokite teoremą.*

Teorema. Sakykime, *f* analizinė funkcija srityje *D*, γ - uždara ištiesinama Žordano kreivė, priklausanti sričiai *D* kartu su savo vidumi, z_0 - taškas kreivės viduje. Tada

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz .$$

Kreivė apeina tašką z_0 teigiama kryptimi (prieš laikrodžio rodyklę).

b) *Kokiais pagrindiniais faktais remiasi jos įrodymas*?

1. Taikoma sudėtinio kontūro teorema. Tada integralas kreive γ pakeičiamas integralu apskritimu $\gamma_\rho(t)=z_0+\rho e^{it}, 0\le t\le 2\pi$.
2. Apskaičiuojamas integralas

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z-z_0}dz .$$

3. Naudojamasi funkcijos f tolydumu taške z_0. Įvertinamas integralas

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| .$$

c) *Pateikite vieną, jūsų nuomone vertą dėmesio, Koši integralinės formulės taikymų.*

Koši integralinė formulė taikoma analizinei funkcijai išskleisti laipsnine eilute.