Matematinės analizės egzaminas
2003.05.28

Atidžiai skaitykite sąlygas. Sprendimuose aiškiai atskirkite uždavinius ir jų dalis. Atskirkite juodraštį nuo švaraščio.

1. Duota lygtis:
   $ydx + (y^3 - x)dy = 0$.
   a) Suraskite integruojantį daugiklį μ (x arba y funkciją). [2]
   b) Kokioje srityje (srityse) forma $\varpi = \mu y dx + \mu(y^3 - x)dy$ tenkina Puankare teoremos sąlygas? [2]
   c) Naudodami kreivinius integralus, suraskite funkciją $u(x; y)$, kad $du = \varpi$. [2]
   d) Jei nesugebate atlikti dalies (c), tai suraskite funkciją u kitaip. [2]
   e) Nubrėžkite lygties fazinį portretą. [3]
   f) Paaiškinkite, kaip iš lygties $ydx + (y^3 - x)dy = 0$ gaunama sistema $\begin{cases} x' = x - y^3, \\ y' = y \end{cases}$? Kuo skiriasi diferencialinės lygties iš (e) ir lygčių sistemos faziniai portretai? [2]
   g) Suradę sistemos $\begin{cases} x' = x - y^3, x(0) = x_0, \\ y' = y, y(0) = y_0 \end{cases}$ antros lygties sprendinį, pirmąją lygtį išspręskite konstantų varijavimo metodu. [2]
   h) Patikrinkite, kad sistemos iš (g) sprendinys tenkina sąlygą $u(x(t); y(t)) = u(x_0; y_0)$. [1]
   i) Patikslinkite dalies (e) fazinį portretą. [1]

2. Duota kreivių šeima $y - 1 = (x + C)^2$.
   a) Išveskite gaubtinės lygtį. [1]
   b) Užrašykite ir patikrinkite sąlygą, garantuojančią gaubtinės ir kreivių šeimos liestinių bendrumą gaubtinės taškuose. [2]
   c) Išveskite kreivių šeimos diferencialinę lygtį. [1]
   d) Suraskite lygties $y' = 2\sqrt{y-1}$ bendrąjį sprendinį. [1]
   e) Kuo skiriasi kreivių šeima, nusakyta lygties $y' = 2\sqrt{y-1}$ bendruoju sprendiniu, nuo kreivių šeimos $y - 1 = (x + C)^2$? Kodėl? [2]
   f) Suraskite lygties $y' = 2\sqrt{y-1}$ ypatingąjį sprendinį. [1]
   g) Patikrinkite Lipšico sąlygą y atžvilgiu funkcijai $f(x; y) = \sqrt{y-1}$ srityje $y \geq 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0$. [2]
   h) Įrodykite, kad funkcija $f(x; y) = \sqrt{y-1}$ srityje $y \geq 1$ netenkina Lipšico sąlygos y atžvilgiu. [2]

3. Duota diferencialinė lygtis $y'' + 2y' + y = e^{-t}$.

a) Naudodami Laplaso transformaciją, raskite homogeninės lygties $y'' + 2y' + y = 0$ sprendinius, tenkinančius sąlygas $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0; y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$. [4]

b) Parašykite trečios eilės poliaus apibrėžimą. Išveskite reziduumo formulę trečios eilės poliui. [2]

c) Parašykite funkcijos e^{tz} skleidinį $z+1$ laipsniais. [1]

d) Naudodami Laplaso transformciją, raskite nehomogeninės lygties $y'' + 2y' + y = e^{-t}$ sprendinį, tenkinantį sąlygą $y_0(0) = 0, y_0'(0) = 0$.
Atvirkštinę Laplaso transformaciją ieškokite, taikydami kompleksinio kintamojo integravimą. Siūlau reziduumus skaičiuoti naudojant dalies (c) skleidinį. [2]

e) Pagrįskite dalies (d) skaičiavimus, nubrėždami integravimo kontūrą ir įvertindami reikiamus integralus. [3]

f) Užrašykite nehomogeninės lygties bendrąjį sprendinį. [1]

g) Raskite nehomogeninės lygties sprendinį su pradine sąlyga $y(0) = 1, y'(0) = 1$. [1]

4. Duota diferencialinė lygtis $y'' + 2y' + y = 0$.

a) Keitiniu $y' = x$ diferencialinę lygtį suveskite į sistemą $\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = x. \end{cases}$.
Pažymėkime $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. [1]

b) Suraskite matricą D, suvedančią matricą A į kanoninę Žordano formą $J = D^{-1}AD$. [4]

c) Pažymėję $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $z = Dw$, gaukite sistemą $w' = Jw$. [1]

d) Išspręskite (kokiu norite būdu) sistemą $w' = Jw$ su pradinėm sąlygom $u(0) = u_0, v(0) = v_0$. [2]

e) Nubrėžkite sistemos iš (d) dalies fazinę diagramą $(u;v)$ koordinačių sistemoje. [4]

f) Įvardinkite pusiausvyros tašką $(0;0)$. [1]

5. Koši integralinė fomulė.

a) Suformuluokite teoremą. [1]

b) Kokiais pagrindiniais faktais remiasi jos įrodymas? [4]

c) Pateikite vieną, jūsų nuomone vertą dėmesio, Koši integralinės formulės taikymų. [2]

Paruošė R.Kudžma