Kompleksinio kintamojo kontrolinis
2003.03.29

Atidžiai skaitykite sąlygas. Sprendimuose aiškiai atskirkite uždavinius ir jų dalis. Atskirkite juodraštį nuo švaraščio.

1.

a) Įrodykite, kad integralas $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$ konverguoja, kai $0 < a < 1$. (2)

b) Apibrėžkime funkciją $f(z) = z^{a-1} = e^{(a-1)\ln z}$. Nurodykite kompleksinės plokštumos sritį, kurioje ši funkcija yra analizinė. Apskaičiuokite šios funkcijos išvestinę. (2)

c) Sakykime, $a = \frac{1}{4}$, sritis D - vienetinis skritulys su išpjauta realiosios ašies dalimi nuo 0 iki 1. Suraskite $f(D)$. Pažymėkite visas teigiamai orientuoto krašto ∂D dalis, nurodykite jų vaizdus $f(\partial D)$ su kryptimis. (4)

d) Įrodykite, kad $\lim\limits_{R\to\infty} \int_\gamma \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = 0$, čia $\gamma(\varphi) = R\,\mathrm{e}^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le 2\pi$. (2)

e) Įrodykite, kad $\lim\limits_{r\to 0} \int_\gamma \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = 0$, čia $\gamma(\varphi) = re^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le 2\pi$. (2)

f) Įvardinkite funkcijos $g(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z}$ ypatinguosius taškus ir apskaičiuokite jos reziduumus. (2)

g) Įrodykite, kad $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$. (5)

2.

a) Įrodykite Gryno teoremos dalį $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{\partial D} Qdy$,

i) jei sritis $D = \{(x;y); a \le y \le b, g(y) \le x \le f(y)\}$. (3)

ii) jei sritį D galima išskaidyti į sritis, nusakytas dalyje (i).(2)

b) Tiksliai suformuluokite visas Gryno teoremos sąlygas ir baikite įrodyti teoremą. (2)

3. Duota funkcija $F(z) = \frac{a^2}{z^2(z^2 - a^2)}, a > 0$. Pažymėkime $g(z) = \frac{a^2 e^{tz}}{z^2(z^2 - a^2)}$.

a) Įrodykite, kad integralai $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(z)dz, c > a$ ir $\int_{d-i\infty}^{d+i\infty} g(z)dz, d > a$ yra lygūs. (2)

b) Išskleiskite funkciją $\frac{a^2}{z^2 - a^2}$ laipsnine eilute z laipsniais (teigiamais). Koks jos konvergavimo spindulys? (1)

c) Parašykite funkcijos e^{tz} skleidimą laipsnine eilute (z laipsniais). Sudauginkite (ką reikia) ir gaukite funkcijos $g(z)$ Lorano eilutę. Užrašykite jos konvergavimo sritį. Apskaičiuokite šios eilutės tris pirmuosius narius. Kam lygus laipsnio z^{-1} koeficientas? (3)

d) Apibrėžkite, kas yra analizinės funkcijos antros eilės polius. Išveskite reziduumo formulę antros eilės poliui. (2)

e) Apskaičiuokite funkcijos $g(z)$ reziduumą taške $z=0$, naudodami dalyje (d) išvesta formule. (1)

f) Suraskite funkcijos $F(s)=\dfrac{a^2}{s^2(s^2-a^2)}, a>0$, atvirkštinę Laplaso transformaciją. (4)

4. Duoti du uždari keliai $\gamma_0(t)=re^{it}, \gamma_1(t)=R\mathrm{e}^{3it}, 0\le t\le 2\pi, 0<r<R$.

a) Įrodykite , kad funkcija $h(s,t)=(1-s)re^{it}+sR\mathrm{e}^{3it}, 0\le s\le 1, 0\le t\le 2\pi$, nėra kelių γ_0 ir γ_1 homotopija srityje $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. (2)

b) Įrodykite, kad keliai γ_0 ir γ_1 nėra homotopiški srityje $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. (2)

5. Kompleksinėje plokštumoje duota žvaigždinė sritis D, du keliai joje $\gamma_1(t), \gamma_2(t), 0\le t\le 1$, su vienoda pradžia $z_0=\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$ ir vienoda pabaiga $z_1=\gamma_1(1)=\gamma_2(1)$ ir analizinė funkcija $f(z)$.

a) Įrodykite, kad $\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz=\int\limits_{\gamma_2} f(z)dz$. (4)

b) Įrodykite, kad integralas

$$F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(\varsigma)d\varsigma$$

apibrėžia analizinę srityje D funkciją ir $F'(z)=f(z), z\in D$. (4)

Paruošė R.Kudžma