Matematinės analizės egzamino užduočių sprendimai
2002.06.06

1. a) *Tolydžiai diferencijuojamai funkcijai* f *įrodykite formulę*:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}(f(1)+f(0)) - \int_0^1 \varphi_1(x) f'(x)dx,$$

čia $\varphi_1(x) = x - \frac{1}{2}$.

Integruokime dalimis

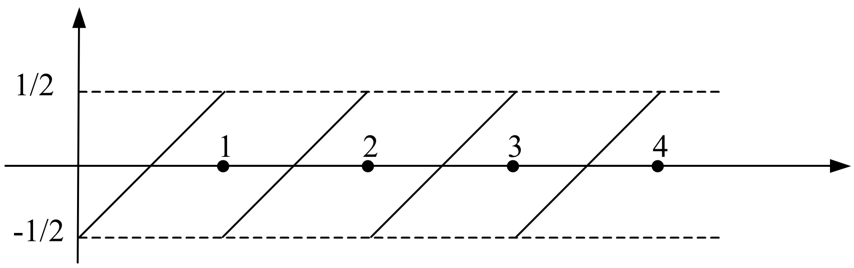
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)d\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
$$= f(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)df(x)$$
$$= \frac{1}{2}(f(1)+f(0)) - \int_0^1 \varphi_1(x) f'(x)dx.$$

b) *Apibrėžkime funkciją*

$\psi_1(x) = \varphi_1(x), 0 \le x \le 1,$

$\psi_1(x) = \varphi_1(x-k), k < x \le k+1, k = 1,2,\dots$.

Nubrėžkite funkcijos ψ_1 *grafiką intervale* $[0;4]$.



c) *Įrodykite, kad* $\int_k^{k+1} f(x)dx = \frac{1}{2}(f(k)+f(k+1)) - \int_k^{k+1}\psi_1(x)f'(x)dx$, $k \in \mathbf{N}$.

Integruokime dalimis

$$\int_k^{k+1} f(x)dx = \int_k^{k+1} f(x)d\left(x-k-\frac{1}{2}\right)$$
$$= f(x)\left(x-k-\frac{1}{2}\right)\Bigg|_k^{k+1} - \int_k^{k+1}\left(x-k-\frac{1}{2}\right)df(x)$$
$$= f(k+1)\left(k+1-k-\frac{1}{2}\right) - f(k)\left(k-k-\frac{1}{2}\right) - \int_k^{k+1}\left(x-k-\frac{1}{2}\right)df(x)$$
$$\frac{1}{2}(f(k)+f(k+1)) - \int_k^{k+1}\psi_1(x)f'(x)dx$$

d) *Įrodykite, kad*

$$\int_0^n f(x)dx = \frac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\dots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n) - \int_0^n \psi_1(x)f'(x)dx.$$

Susumuokime lygybes, įrodytas pereitoje dalyje nuo 0 iki $n-1$:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \int_0^1 \psi_1(x)f'(x)dx,$$
$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2}(f(1)+f(2)) - \int_1^2 \psi_1(x)f'(x)dx,$$
$$\ldots$$
$$\int_k^{k+1} f(x)dx = \frac{1}{2}(f(k)+f(k+1)) - \int_k^{k+1} \psi_1(x)f'(x)dx,$$
$$\ldots$$
$$\int_{n-1}^{n} f(x)dx = \frac{1}{2}(f(n-1)+f(n)) - \int_{n-1}^{n} \psi_1(x)f'(x)dx$$
$$\int_0^n f(x)dx = \frac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n) - \int_0^n \psi_1(x)f'(x)dx$$

e) *Suraskite antrojo laipsnio polinomą* $y=\varphi_2(x)$*, tenkinantį sąlygas*

$\varphi_2'(x)=\varphi_1(x), x\in \mathbf{R}$, ir $\int_0^1 \varphi_2(x)dx = 0$.

Nubrėžkite funkcijos $y=\varphi_2(x)$ *grafiką intervale* $[0;1]$.

$$\varphi_2(x) = \int \varphi_1(x)dx = \int (x-\frac{1}{2})dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + C;$$
$$0 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + C\right)dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + Cx\right)\Bigg|_0^1$$
$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + C = -\frac{1}{12} + C,$$
$$C = \frac{1}{12},$$
$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}.$$

f) Apibrėžkime funkciją

$\psi_2(x)=\varphi_2(x), 0\le x\le 1,$

$\psi_2(x)=\varphi_2(x-k), k<x\le k+1, k=1,2,\ldots.$

Nubrėžkite funkcijos ψ_2 *grafiką intervale* $[0;4]$.

g) *Dukart tolydžiai diferencijuojamai funkcijai* f *įrodykite lygybę*

$$\int_0^n f(x)dx = \frac{1}{2}f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2}f(n) - \frac{1}{12}(f'(n)-f'(0)) + \int_0^n \psi_2(x)f''(x)dx. \quad (4)$$

Iš funkcijų $\varphi_1,\psi_1,\varphi_2,\psi_2$ apibrėžimų išplaukia, kad

$\psi_2'(x)=\psi_1(x), k<x<k+1, \forall k$.

Tada

$$\int_k^{k+1} \psi_1(x) f'(x)dx = \int_k^{k+1} \psi_2'(x) f'(x)dx$$
$$= \int_k^{k+1} f'(x) d\psi_2(x)$$
$$= f'(x)\psi_2(x)\Big|_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \psi_2(x) f''(x)dx$$
$$= \frac{1}{12} f'(k+1) - \frac{1}{12} f'(k) - \int_k^{k+1} \psi_2(x) f''(x)dx$$

Galime patikslinti (c) dalies formulę
$$\int_k^{k+1} f(x)dx = \frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) - \int_k^{k+1} \psi_1(x) f'(x)dx$$
$$= \frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) - \frac{1}{12} f'(k+1) + \frac{1}{12} f'(k) + \int_k^{k+1} \psi_2(x) f''(x)dx$$

Susumavę pastarąsias lygybes nuo 0 iki $n-1$, gauname reikalaujamą rezultatą.

h) *Įrodykite, kad* $\int_k^{k+1} \psi_2(x)dx = 0, k = 0,1,2,\ldots$.
$$\int_k^{k+1} \psi_2(x)dx = \int_k^{k+1} \varphi_2(x-k)dx.$$

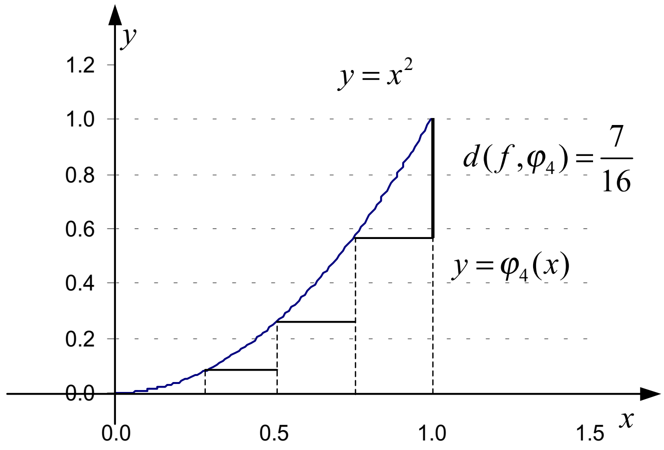
Pakeiskime integravimo kintamuosius
$$x - k = u, dx = du,$$
$$x = k, u = 0, x = k+1, u = 1,$$
$$\int_k^{k+1} \varphi_2(x-k)dx = \int_0^1 \varphi_2(u)du = 0.$$

i) *Panaudokite formulę, išvestą dalyje (g) funkcijai* $f(x) = x^2$*, ir gaukite kvadratų sumos formulę* $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Kadangi $(x^2)' = 2x, (x^2)'' = 2$, tai
$$\int_0^n \psi_2(x)(x^2)''dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \psi_2(x)\cdot 2\cdot dx = 0,$$
$$\int_0^n x^2 dx = \frac{1}{2}0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{12}(2n - 2\cdot 0),$$
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. *Nagrinėkime funkciją* $f(x) = x^2, 0 \le x \le 1$. *Apibrėžkime seką laiptinių funkcijų*
$$\varphi_n(x) = \left(\frac{k}{n}\right)^2, \frac{k}{n} \le x < \frac{k+1}{n}, k = 0,1,2,\ldots,n-2,\ \varphi_n(x) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2, \frac{n-1}{n} \le x \le 1.$$

a) *Nubrėžkite funkcijų* f *ir* φ_4 *grafikus viename brėžinyje.*



b) *Apskaičiuokite atstumą tarp funkcijų* $d(f,\varphi_4) = \sup\limits_{0\le x\le 1} |f(x) - \varphi_4(x)|$.
Pavaizduokite šį atstumą brėžinyje.

$$\begin{aligned} d(f,\varphi_4) &= \sup_{0\le x\le 1} |f(x) - \varphi_4(x)| \\ &= |f(1) - \varphi_4(1)| \\ &= \left| f(1) - f\left(\frac{3}{4}\right)\right| \\ &= \left|1 - \frac{9}{16}\right| = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

c) *Apskaičiuokite (įvertinkite) atstumą tarp funkcijų*
$d(f,\varphi_n) = \sup\limits_{0\le x\le 1} |f(x) - \varphi_n(x)|$, $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} d(f,\varphi_n) &= \sup_{0\le x\le 1} |f(x) - \varphi_n(x)| \\ &= |f(1) - \varphi_n(1)| \\ &= \left| f(1) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right| \\ &= \left|1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right| \\ &= \frac{n^2 - (n^2 - 2n + 1)}{n^2} \\ &= \frac{2n-1}{n^2} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

d) *Suformuluokite, ką reiškia, kad laiptinių funkcijų seka* $\{\varphi_n\}$ *tolygiai konverguoja į funkciją* $f(x) = x^2$ *inetrvale* $[0;1]$.
Sakysime, kad laiptinių funkcijų seka $\{\varphi_n\}$ tolygiai konverguoja į funkciją $f(x) = x^2$ inetrvale $[0;1]$, jei kiekvienam $\varepsilon, \varepsilon > 0$, egzistuoja toks *N*, kad

$$d(f,\varphi_n)=\sup_{0\le x\le 1}\left|f(x)-\varphi_n(x)\right|<\varepsilon,$$

kai $n>N$.

e) *Naudodamiesi Kantoro teorema, įrodykite, kad laiptinių funkcijų seka* $\{\varphi_n\}$, *apibrėžta uždavinio pradžioje, tolygiai konverguoja į funkciją* $f(x)=x^2$ *intervale* $[0;1]$.

Kadangi funkcija $f(x)=x^2$ yra didėjanti, tai

$$d(f,\varphi_n)=\sup_{k=0,\dots,n-1}\left|f\left(\frac{k+1}{n}\right)-\varphi_n\left(\frac{k+1}{n}-0\right)\right|$$
$$=\sup_{k=0,\dots,n-1}\left|f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|,$$

čia $\varphi_n(a-0)=\lim_{x\uparrow a}\varphi_n(x)$. Iš Kantoro teoremos išplaukia, kad bet kokiam $\varepsilon,\varepsilon>0$, egzistuoja toks teigiamas δ, kad

$$|x'-x''|<\delta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Todėl pakankamai dideliam n $\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}=\frac{1}{n}<\delta$. Tada ir

$$\sup_{k=0,\dots,n-1}\left|f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|=d(f,\varphi_n)<\varepsilon.$$

f) *Įrodykite tą patį, ką ir dalyje* (e), *naudodami įvertį, gautą dalyje* (c).

Dalyje (c) gautas įvertis $d(f,\varphi_n)<\frac{2}{n}$ rodo, kad $\lim_{n\to\infty}d(f,\varphi_n)=0$.

g) *Apskaičiuokite integralus* $\int_0^1\varphi_n(x)dx$ *ir ribą* $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\varphi_n(x)dx$.

$$\int_0^1\varphi_n(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{k+1/n}\varphi_n(x)dx$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Sumai rasti naudojomės pirmojo uždavinio dalyje (i) išvesta (parašyta) formule.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\varphi_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)}{6}=\frac{1}{3}.$$

3. a) *Ištirkite iškilumą, suraskite asimptotes ir nubrėžkite funkcijos* $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ *grafiką.*

Pirmiausia pastebėsime, kad funkcija lyginė. Vadinasi, funkcijos grafikas yra simetriškas y-ų ašies atžvilgiu. Apskaičiuokime išvestines

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

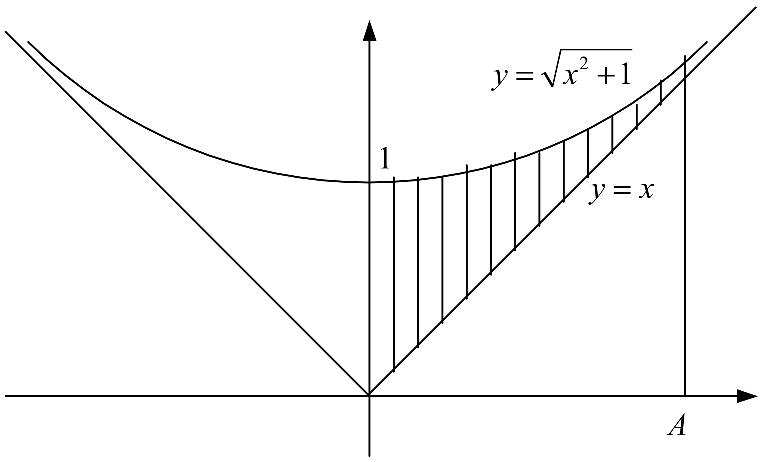
$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)''=\frac{\sqrt{1+x^2}-x\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Pirmoji funkcijos išvestinė teigiama, kai $x>0$ ir neigiama, kai $x<0$. Vadinasi, taškas $x=0$ yra minimumo taškas. Antroji išvestinė visada teigiama – funkcija iškila.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0.$$

Taigi tiesė $y=x$, o taip pat tiesė $y=-x$ yra grafiko asimptotės. Brėžiame grafiką.



b) *Brėžinyje pavaizduokite figūrą, kurios plotą išreiškia integralas*

$$\int_0^A(\sqrt{1+x^2}-x)dx,\ A>0.$$

c) *Suintegruokite skirtingais būdais integralą (pateikiamas atsakymas)*

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

(*Ženklo pakeitimas Euler'io keitiniuose nebus laikomas kitu būdu. Neišsigąskite, jei gausite kitokią pirmykštės funkcijos išraišką. Jei integravote teisingai, tai ji ekvivalentiška nurodytai formai. Pabandykite tuo įsitikinti*).

1 būdas. Keiskime kintamuosius

$$x = \operatorname{sh} t,$$
$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{ch} t,$$
$$dx = \operatorname{ch} t;$$
$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+1}\,dx &= \int \operatorname{ch} t \operatorname{ch} t\,dt \\ &= \int \frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2} dt \\ &= \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + \frac{1}{2}t + C \\ &= \frac{1}{4} 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + \frac{1}{2}t + C \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.\end{aligned}$$

2 būdas. Naudosime Eulerio keitinį $\sqrt{1+x^2} = x - z$

$$x^2 + 1 = x^2 - 2xz + z^2,$$
$$2xz = z^2 - 1,$$
$$x = \frac{z^2-1}{2z} = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$
$$\sqrt{1+x^2} = x - z = \frac{z^2-1}{2z} - z = \frac{-1-z^2}{2z} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + z\right),$$
$$dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)dz = \frac{1}{2}\frac{z^2+1}{z^2}dz$$
$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = -\int \frac{1+z^2}{2z}\frac{z^2+1}{2z^2}dz$$
$$= -\frac{1}{4}\int \frac{z^4+2z^2+1}{z^3}dz$$
$$= -\frac{1}{4}\int\left(z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3}\right)dz$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{z^2}{2} + 2\ln|z| - \frac{1}{2z^2}\right) + C$$
$$= -\frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{1}{8z^2} + C$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|z| + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{z^2} - z^2\right) + C$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|z| - \frac{1}{8}\left(z - \frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z} + z\right) + C$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C$$

Atsakymas dar nėra toks, koks nurodytas. Galima logaritmą pertvarkyti

$$\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\ln\frac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

3 būdas. Integruokime dalimis
$$\int\sqrt{x^2+1}dx=x\sqrt{x^2+1}-\int x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx$$
$$=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$
$$=x\sqrt{x^2+1}-\int\sqrt{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$
Gavome lygtį integralo $\int\sqrt{x^2+1}dx$ atžvilgiu. Ją išsprendžiame
$$\int\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$
Integralas pasatrojoje lygybėje yra lentelinis integralas, t.y.
$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

d) *Ištirkite integralo* $\int_0^\infty(\sqrt{1+x^2}-x)dx$ *konvergavimą pagal apibrėžimą.*

Reikia apskaičiuoti ribą
$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^A$$
$$=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{2}A\sqrt{A^2+1}+\ln\left(A+\sqrt{A^2+1}\right)-\frac{A^2}{2}\right)$$
Nesunku pastebėti, kad
$$A\sqrt{A^2+1}-A^2>0.$$
Tada
$$\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{2}A\sqrt{A^2-1}-\frac{A^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(A^2+\sqrt{A^2+1}\right)\right)\geq\lim_{A\to\infty}\ln\left(A+\sqrt{A^2+1}\right)=+\infty.$$

e) *Ištirkite integralo* $\int_0^\infty(\sqrt{1+x^2}-x)dx$ *konvergavimą naudodami palyginimo teoremą.*

Integralą suskaidome į du
$$\int_0^\infty(\sqrt{1+x^2}-x)dx=\int_0^1(\sqrt{1+x^2}-x)dx+\int_1^\infty(\sqrt{1+x^2}-x)dx.$$
Pirmasis integralas konverguoja, nes pointegralinė funkcija tolydi intervale [0,1]. Antrajam ištirti reikia išsiaiškinti, kokiam x-so laipsniui pointegralinė funkcija yra ekvivalentiška, kai $x\to\infty$.

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{1}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$
$$=\frac{1}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\sim\frac{1}{2x},x\to+\infty.$$

Tokį rezultatą galima gauti ir kitaip

$$\sqrt{x^2+1}-x=x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-x$$
$$=x\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-x$$
$$=x+\frac{1}{2x}+x\cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right)-x$$
$$=\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{2x},x\to\infty$$

Funkcija $\frac{1}{2x}$ nėra integruojama intervale $[1;+\infty)$. Tada tokia pati yra ir funkcija $\sqrt{x^2+1}-x$ arba integralas $\int_1^{\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)dx$ diverguoja. Tada diverguoja ir integralas $\int_0^{+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)dx$.

4.

a) *Apibrėžkite tolygaus tolydumo sąvoką. Suformuluokite Kantoro teoremą.*

Apibrėžimas. Realaus kintamojo funkciją f vadinsime tolygiai tolydžia aibėje *X*, jei bet kokiam teigiamam ε galima rasti tokį teigiamą δ, kad

$$|x'-x''|<\delta,\ x',x''\in X\ \Rightarrow\ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Kantoro teorema. Tolydi funkcija uždarame intervale $[a,b]$ yra tolygiai tolydi jame.

b) *Pateikite pavyzdį tolydžios funkcijos (ne konstantos) intervale* $[1;\infty)$, *kad ji būtų tolygiai tolydi visame intervale. Pavyzdį pagrįskite.*

Galima pateikti keletą pavyzdžių.

1. $f(x)=x$.

$|f(x')-f(x'')|=|x'-x''|<\varepsilon$, kai $|x'-x''|<\delta$, t.y. galime imti $\delta=\varepsilon$.

2. $f(x)=\frac{1}{x}$.

$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\left|\frac{x''-x'}{x'x''}\right|\le|x'-x''|$, kai $x'\ge1$ ir $x''\ge1$.

Kaip ir pirmajame pavyzdyje galime imti $\delta=\varepsilon$.

c) *Pateikite pavyzdį tolydžios, bet netolygiai tolydžios funkcijos intervale* $[0;1)$. *Pagrįskite tai.*

Funkcija $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ tolydi intervale $[0;1)$.

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{1}{1-x'}-\frac{1}{1-x''}\right|=\left|\frac{x''-x'}{(1-x')(1-x'')}\right|=\frac{|x''-x'|}{|1-x'|\cdot|1-x''|}$$

Reikia patikrinti sąlygą

$$\exists\varepsilon,\varepsilon>0,\forall\delta,\delta>0,\exists x',x''\in X,|x'-x''|<\delta,|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon .$$

Imkime $\varepsilon=1$, $0<x'<x''<1$, $\delta<1$, $|x''-x'|=x''-x'=\dfrac{\delta}{2}$. Tada įvertiname

$$\frac{|x''-x'|}{|1-x'|\cdot|1-x''|}=\frac{|x''-x'|}{|1-x''+x''-x'|\cdot|1-x''|}=\frac{\frac{\delta}{2}}{\left|1-x''+\frac{\delta}{2}\right|\cdot|1-x''|}\geq\frac{\frac{\delta}{2}}{\left|1-x''+\frac{\delta}{2}\right|^{2}}\geq 1$$

ir išsprendžiame paskutiniąją nelygybę

$$\frac{\delta}{2}\geq\left|1-x''+\frac{\delta}{2}\right|^{2},$$

$$\sqrt{\frac{\delta}{2}}\geq\left|1-x''+\frac{\delta}{2}\right|=1-x''+\frac{\delta}{2},$$

$$1-x''\leq\sqrt{\frac{\delta}{2}}-\frac{\delta}{2}$$

Paėmę x'' pakankamai arti 1, t.y. tenkinančio aukščiau parašytą nelygybę, o $0<x'<x''<1$, $x''-x'=\dfrac{\delta}{2}$, gausime, kad $|f(x')-f(x'')|\geq 1$.

d) *Suformuluokite Kantoro teoremos įrodymo pagrindinius etapus. Jei žinote du skirtingus įrodymus, tai parašykite abiem atvejais.*

1 žingsnis. Sakykime, funkcija nėra tolygiai tolydi.

$$\exists\varepsilon,\varepsilon>0,\forall\delta,\delta>0,\exists x',x''\in X,|x'-x''|<\delta,|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon .$$

2 žingsnis. Imame tokią seką $\{\delta_n\}$, kad $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$. Tada randame sekas $\{x'_n\},\{x''_n\}$, tenkinančias aukščiau užrašytas sąlygas.

3 žingsnis. Remdamiesi Vejerštraso teorema iš sekos $\{x'_n\}$ išrenkame posekį $\{x'_{n_k}\}$, konverguojantį į kokį nors aibės *X* elementą *c*. Posekis $\{x''_{n_k}\}$ taip pat konverguos į *c*.

4 žingsnis. Pasinaudoję funkcijos f tolydumu taške *c*, galime pereiti prie ribos nelygybėje

$$|f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k})|\geq\varepsilon$$

ir gauti prieštarą.