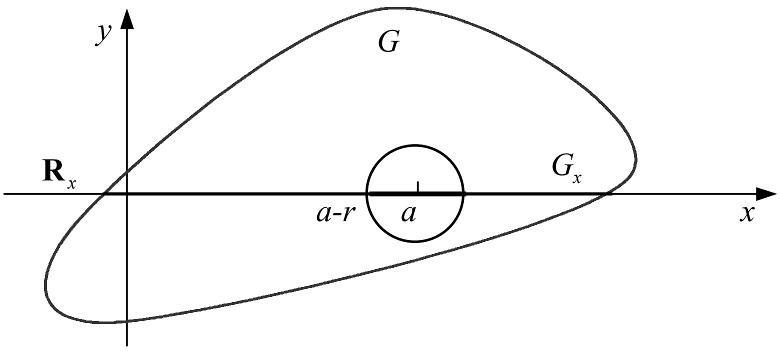
**Matematinės analizės egzamino užduočių sprendimai**
**2003.01.06**

1. *Duotas plokštumos* $\mathbf{R}^2$ *poaibis* $K = \{(x;0), x \in [0,1]\}$.
   a) *Naudodamiesi kompaktiškos aibės apibrėžimu sekų kalba, įrodykite, kad K yra kompaktiška aibė.*

Paimkime bet kokią seką $z_n = (x_n, 0) \in K, \forall n$. Pirmųjų koordinačių seka $\{x_n\}$ aprėžta. Iš Vejerštraso teoremos išplaukia, kad iš sekos $\{x_n\}$ galima išrinkti konverguojantį posekį $\{x_{n_k}\}$, t.y. egzistuoja riba $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a, 0 \le a \le 1$. Tada posekis $z_{n_k} = (x_{n_k}, 0)$ konverguoja į aibės *K* elementą $(a,0)$.

   b) *Įrodykite teiginį: Jei G yra atviras* $\mathbf{R}^2$ *poaibis, tai* $G_x = G \cap \mathbf{R}_x, \mathbf{R}_x = \{(x,0), x \in \mathbf{R}\}$ *yra atviras tiesės* $\mathbf{R}_x$ *poaibis. Pavaizduokite tai geometriškai.*

Paimkime tašką $z = (a;0) \in G \cap \mathbf{R}_x$. Egzistuoja toks $r, r > 0$, kad skritulys su centru *z* ir spinduliu *r* $B(z,r) \subset G$. Tada intervalas $((a-r, a+r), 0) \subset G_x$.



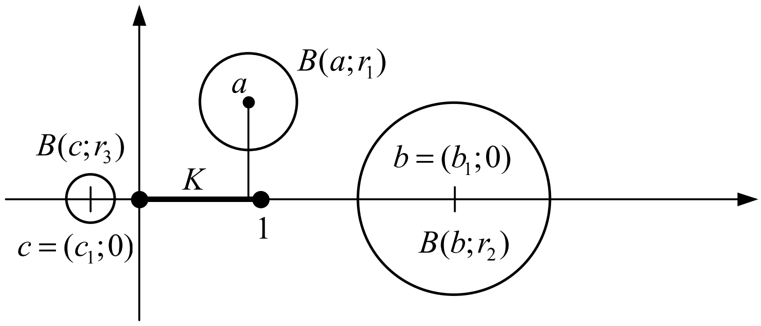

   c) *Naudodamiesi kompaktiškos aibės apibrėžimu atvirųjų denginių kalba, įrodykite, kad K yra kompaktiška aibė.*

Sakykime, $\{G^\alpha, \alpha \in A\}, G^\alpha \subset \mathbf{R}^2$ - aibės *K* denginys atviromis aibėmis. Dalyje (b) įrodėme, kad aibės $G_x^\alpha = G^\alpha \cap \mathbf{R}_x$ yra atviri tiesės $\mathbf{R}_x$ poaibiai. Jų sistema $\{G_x^\alpha, \alpha \in A\}$ padengia vinmatę aibę *K*. Pagal Borelio lemą iš šios sistemos galima išrinkti baigtinę sistemą $\{G_x^{\alpha_k}, \alpha_k \in A, k = 1,2,...,m\}$, padengiančią *K*. Tada ir dvimačių atvirųjų aibių sistema $\{G^{\alpha_k}, \alpha_k \in A, k = 1,2,...,m\}$ padengs *K*.

   d) *Įrodykite, kad K yra uždara aibė (naudodamiesi uždarosios aibės apibrėžimu).*

Sakysime, kad aibė *K* uždara, jei jos papildinys $K^C = \mathbf{R}^2 \setminus K$ atvira aibė. Paimkime tašką iš aibės *K* papildinio. Gali būti keli atvejai.

1. Sakykime, $a = (a_1, a_2) \in K^C$ ir $a_2 \ne 0$. Apibrėžkime $r_1 = \dfrac{|a_2|}{2}$. Tada $B(a; r_1) \subset K^C$.




2. Sakykime, $b=(b_1;0)\in K^C, b_1>1$. Apibrėžkime $r=\dfrac{b_1-1}{2}$. Aišku, kad $B(b;r)\cap K=\varnothing$

3. Jei $c=(c_1;0)\in K^C, c_1<0$, tai apibrėžkime $r_3=\dfrac{|c_1|}{2}=\dfrac{-c_1}{2}$. Vėl $B(c;r_3)\subset K^C$.

Įrodėme, kad aibė $K^C$ yra atvira. Tada aibė $K$ uždara.

4. *Duota dviejų kintamųjų funkcija* $f(x,y)=xy-x^2$.
   a) *Nubrėžkite funkcijos portretą.*

Apskaičiuojame pirmąsias dalines išvestines

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=y-2x, \frac{\partial f}{\partial y}=f_y=x.$$

Horizontalioji daugdara $H: f_x=y-2x=0$ - tiesė $y=2x$.
Vertikalioji daugdara $V: f_y=x=0$ - $y$-ų ašis. Tikriname, ar tiesė $x=0$ nėra lygio linija. $f(0,y)=0$. Taip – tai nulinė lygio linija.
Horizontalios ir vertikalios daugdarų sankirta – vienas taškas $O(0;0)$
Skaičiuojame antrąsias išvestines

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}=-2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}=0, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy}=1$$

ir sudarome antrųjų išvestinių matricą

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

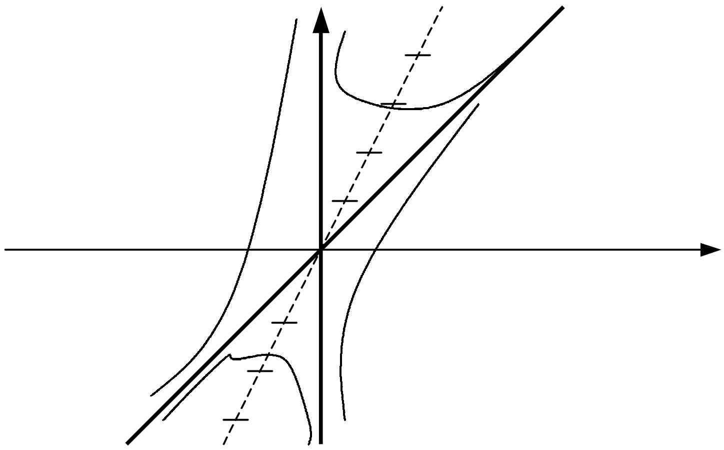
Determinantas $\Delta_2=-1$, matrica neigiamai apibrėžta, taškas $O(0;0)$ - balno taškas.
Šiuo atveju lengva rasti separatrisę

$$f(x,y)=f(0,0)=0,$$
$$xy-x^2=0,$$
$$x(y-x)=0,$$
$$x=0, y=x.$$

Nustatome lygio linijų didėjimo ir mažėjimo sritis pagal pirmąją išvestinę

$$y'_x=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{y-2x}{x}=\frac{2x-y}{x}.$$

Brėžiame funkcijos portretą.



b) *Sakykime,* $\gamma(t) = (h(t), k(t))$ *yra separatrisės, einančios per tašką* $(0,0)$ ($h(0)=0, k(0)=0$), *parametrizacija. Išveskite separatrisės liestinių krypčių vektorių lygtį. Parašykite separatrisės paprasčiausias parametrines išraiškas.*

**Pastaba**. Uždavinys nelabai tiksliai suformuluotas. Ar reikalaujama rasti bendrą separatrisės liestinių krypčių lygtį ar šiuo konkrečiu atveju? Bet šiuo konkrečiu atveju separatrisės lygtis yra labai paprasta $xy - x^2 = 0$ ir ją mokame išspręsti. Sprendiniai – dvi tiesės $x = 0, y = x$. Kokia prasmė ieškoti separatrisės liestinių krypčių vektorių? Tačiau tai galima rasti. Įstatę $\gamma(t) = (h(t), k(t))$ į lygybę

$$f(x, y) = xy - x^2,$$

kuri yra funkcijos *f* Teiloro formulė taško $(0;0)$ aplinkoje, gauname

$$f(h(t), k(t)) = h(t)k(t) - h^2(t).$$

Bet $f(h(t), k(t)) = f(0,0) = 0$. Todėl

$$h(t)k(t) - h^2(t) = 0,$$

$$\frac{h(t)k(t)}{t^2} - \frac{h^2(t)}{t^2} = 0.$$

Tarę, kad funkcijos *h, k* diferencijuojamos ir $\tau = (h'(0), k'(0)) = (\alpha, \beta)$, perėję prie ribos ankstesnėje lygybėje, gausime reikalaujamą lygtį

$$\alpha\beta - \alpha^2 = 0.$$

Šios lygties sprendiniai $\tau_1 = (0,1), \tau_2 = (1,1)$.

Separatrisę galima parametrizuoti taip: $\gamma_1(t) = (0,t), \gamma_2(t) = (t,t), t \in \mathbf{R}$.

c) *Apskaičiuokite antrąsias išvestines*:

i) *naudodamiesi neišreikštinės funkcijos teorema*;

Neišreikštinės funkcijos teorema leidžia rasti lygio linijų $y = y(x, C)$, kurios yra lygties $f(x, y) - C = 0$ sprendiniai, išvestines neiškant pačių funkcijų

$$y'_x = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Pastarąją formulę reikia dar sykį diferencijuoti. Gauname antrąją išvestinę

$$y''_{xx} = -\frac{f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{f_y^3}.$$

Taigi

$$y'_x = \frac{2x-y}{x}.$$

Antrajai išvestinei rasti galima naudotis jos formule, bet galima difrencijuoti tiesiogiai

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \left(\frac{2x-y}{x}\right)' = \frac{(2-y'_x)x-(2x-y))}{x^2} \\ &= \frac{2x-\dfrac{2x-y}{x}x-2x+y}{x^2} \\ &= \frac{2y-2x}{x^2} = \frac{2(y-x)}{x^2} \end{aligned}$$

ii) *išsireiškę funkcijas* $y = y(x,C)$.

Išsprendę lygtį $xy - x^2 = C$, gauname $y = \dfrac{C+x^2}{x} = \dfrac{C}{x} + x$. Randame išvestines

$$y' = -\frac{C}{x^2} + 1,\ y'' = \frac{2C}{x^3}.$$

d) *Ištirkite lygio linijų iškilumą. Ar iš abiejų išvestinės išraiškų išplaukia tas pats rezultatas? Kuri antros išvestinės forma yra patogesnė?*

Iš pirmosios antrosios išvestinės išraiškos matyti, kad antroji išvestinė teigiama ir lygio linijos iškilos, kai $y > x$, o antroji išvestinė neigiama ir lygio linijos įgaubtos, kai $y < x$.

Kita antrosios išvestinės išraiška kaip ir paprastesnė. Iš jos gauname, kad lygio linijos iškilos, kai $C > 0, x > 0$ ir $C < 0, x < 0$, o įgaubtos, kai $C < 0, x > 0$ ir $C > 0, x < 0$.

Lygio linijų lygtyje įstatę $y = 0$, gauname $-x^2 = C$. Taigi *x*-ų ašį kerta lygio linijos, atitinkančios neigiamą *C*.

Aišku, kad rezultatas iš abiejų išraiškų gaunamas tas pats. Man asmeniškai pirmoji išraiška patogesnė – reikia mažiau galvoti.

5. *Duota diferencialinių lygčių sistema*

$$\begin{cases} x'(t) = x, x(0) = x_0, \\ y'(t) = 2x - y, y(0) = y_0. \end{cases}$$

a) *Išspręskite šią sistemą naudodami Laplaso transformaciją. Sprendinį patikrinkite.*

Pažymėkime $L(x)(s) = X(s)$, $L(y)(s) = Y(s)$. Tada

$$L(x')(s) = -x(0) + sX(s) = -x_0 + sX(s),$$

$$L(y')(s) = -y(0) + sY(s) = -y_0 + sY(s)$$

ir pagalbinė lygčių sistema

$$\begin{cases} -x_0 + sX(s) = X(s), \\ -y_0 + sY(s) = 2X(s) - Y(s). \end{cases}$$

Ją lengvai išsprendžiame

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{x_0}{s-1}, \\ Y(s) = \dfrac{y_0}{s+1} + \dfrac{2X(s)}{s+1} = \dfrac{y_0}{s+1} + \dfrac{2x_0}{(s-1)(s+1)}. \end{cases}$$

Randame atvirkštines Laplaso transformacijas (galima iš lentelių)

$$x(t) = L^{-1}(X)(t) = x_0 e^t .$$

Išdėstę paprastomis trupmenomis $\dfrac{2}{(s-1)(s+1)} = \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{s+1}$, randame kitą funkciją

$$y(t) = L^{-1}(Y)(t) = y_0 e^{-t} + x_0 e^t - x_0 e^{-t} = x_0 e^t + (y_0 - x_0)e^{-t} .$$

Patikriname pradines sąlygas

$$x(0) = x_0, y(0) = x_0 + (y_0 - x_0) = y_0$$

ir lygčių sistemą

$$x'(t) = x_0 e^t = x(t) ,$$
$$y'(t) = x_0 e^t - (y_0 - x_0)e^{-t} = 2x_0 e^t - x_0 e^t - (y_0 - x_0)e^{-t} = 2x(t) - y(t) .$$

b) *Apskaičiuokite* $f(t) = x(t)y(t) - x^2(t)$.

Skaičiuojame

$$\begin{aligned} f(t) &= x_0 e^t (x_0 e^t + (y_0 - x_0)e^{-t}) - x_0^2 e^{2t} \\ &= x_0^2 e^{2t} + x_0 y_0 - x_0^2 - x_0^2 e^{2t} \\ &= x_0 y_0 - x_0^2. \end{aligned}$$

c) *Susiekite dalyje* (b) *gautą rezultatą su* (2) *užduotyje nupieštu funkcijos portretu.*

Funkcijos $x(t), y(t)$ parametrizuoja funkcijos $f(x,y) = xy - x^2$ lygio linijas, einančias per tašką $(x_0; y_0)$. Tiksliau, dalį lygio linijos, prasidedančios taške $(x_0; y_0)$.

d) *Raskite ribą* $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)}$.

Jei $x_0 \neq 0$, tai

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{x_0 e^t + (y_0 - x_0)e^{-t}}{x_0 e^t} = 1 - \frac{y_0 - x_0}{x_0} e^{-2t} ,$$

ir $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1$.

e) *Funkcijos portrete pažymėkite rodykles, rodančias diferencialinės lygčių sistemos trajektorijų* $(x(t), y(t))$ *kitimo kryptis.*

6. *Apskaičiuokite integralą* $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin\alpha t)^2}{t^2} dt$, $\alpha > 0$.

a) *Apibrėžkime integralą* $I(\alpha,s)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-st}\frac{(\sin\alpha t)^2}{t^2}dt$ , $s>0$ . *Pagrįskite operaciją* $\lim\limits_{s\downarrow 0} I(\alpha,s)=\int\limits_0^{+\infty}\lim\limits_{s\downarrow 0} e^{-st}\frac{(\sin\alpha t)^2}{t^2}dt=I(\alpha)$ .

Suskaidykime integralą $I(\alpha,s)$ į du integralus

$$I_1(\alpha,s)=\int\limits_0^1 e^{-st}\frac{(\sin\alpha t)^2}{t^2}dt ,$$

$$I_2(\alpha,s)=\int\limits_1^{+\infty} e^{-st}\frac{(\sin\alpha t)^2}{t^2}dt .$$

Perėjimą prie ribos garantuoja integruojamos mažorantės (parametrą $\alpha$ galime laikyti konstanta)

$$\left|e^{-st}\frac{(\sin\alpha t)^2}{t^2}\right|\le 1\cdot\frac{|\alpha t|^2}{t^2}=|\alpha|^2,\ s\ge 0, 0\le t\le 1 .$$

Konstanta inegruojama kompaktiškame intervale $[0,1]$.

$$\left|e^{-st}\frac{(\sin\alpha t)^2}{t^2}\right|\le\frac{1}{t^2},\ s\ge 0, 1\le t<+\infty .$$

Funkcija $f(t)=\frac{1}{t^2}$ yra integruojama intervale $[1,+\infty)$.

b) *Apskaičiuokite* $\frac{\partial I(\alpha,s)}{\partial\alpha}$. *Pagrįskite operaciją*

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}I(\alpha,s)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}e^{-st}\frac{(\sin\alpha t)^2}{t^2}dt=\int\limits_0^{+\infty}e^{-st}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{(\sin\alpha t)^2}{t^2}dt . \qquad (3)$$

Apskaičiuojame

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{(\sin\alpha t)^2}{t^2}=\frac{2\sin\alpha t\cdot\cos\alpha t\cdot t}{t^2}=\frac{\sin 2\alpha t}{t} .$$

Norint pagrįsti diferencijavimo po integralo ženklu operaciją, reikia rasti išdiferencijuotos funkcijos $e^{-st}\frac{\sin 2\alpha t}{t}$ integruojamą mažorantę. Iš pradžių reikia integralą suskaidyti į du kaip ir dalyje (a).

$$I_1(\alpha,s)=\int\limits_0^1 e^{-st}\frac{\sin 2\alpha t}{t}dt ,$$

$$I_2(\alpha,s)=\int\limits_1^{+\infty} e^{-st}\frac{\sin 2\alpha t}{t}dt .$$

Intervale $[0,1]$ funkcija įvertinama paprastai

$$\left|e^{-st}\frac{\sin 2\alpha t}{t}\right|\le 1\cdot\frac{|2\alpha t|}{t}=2|\alpha|,\ s\ge 0, 0\le t\le 1 .$$

Jei pointegralinę funkciją intervale $[1,+\infty)$ vertinsime kaip dalyje (a), tai gausime $\left|e^{-st}\frac{\sin 2\alpha t}{t}\right|\le\frac{1}{t}, s\ge 0$ . Tačiau funkcija $\frac{1}{t}$ nėra integruojama intervale $[1,+\infty)$. Todėl reikia integruoti dalimis

$$\int_1^{+\infty} e^{-st}\frac{\sin 2\alpha t}{t}dt = \int_1^{+\infty}\frac{1}{t}de^{-st}\frac{s\cdot\sin 2\alpha t - 2\alpha\cos 2\alpha t}{s^2+(2\alpha)^2}$$

$$= \frac{1}{t}e^{-st}\frac{s\cdot\sin 2\alpha t - 2\alpha\cos 2\alpha t}{s^2+(2\alpha)^2}\Bigg|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} e^{-st}\frac{s\cdot\sin 2\alpha t - 2\alpha\cos 2\alpha t}{s^2+(2\alpha)^2}\frac{1}{t^2}dt$$

Dabar pointegralinę funkciją $e^{-st}\frac{s\cdot\sin 2\alpha t - 2\alpha\cos 2\alpha t}{s^2+(2\alpha)^2}\frac{1}{t^2}$ galima įvertinti integruojama intervale $[1,+\infty)$ funkcija $\frac{c}{t^2}$.

c) *Jei* $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$, *tai kokios funkcijos Laplaso transformacija yra funkcija* $G(s)=\int_s^{+\infty} F(\sigma)d\sigma$ ? (*Naudokitės Fubini teorema.*) (3)

$$G(s)=\int_s^{+\infty} F(\sigma)d\sigma$$
$$=\int_s^{+\infty} d\sigma\int_0^{+\infty} e^{-\sigma t}f(t)dt$$
$$=\int_0^{+\infty} f(t)dt\int_s^{+\infty} e^{-\sigma t}d\sigma$$
$$=\int_0^{+\infty} f(t)\left(\frac{e^{-\sigma t}}{-t}\Bigg|_s^{+\infty}\right)dt$$
$$=\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt$$

Funkcija $G(s)$ yra funkcijos $g(t)=\frac{f(t)}{t}$ Laplaso transformacija.

d) *Naudodami* (c) *dalies rezultatą apskaičiuokite funkcijos* $\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{(\sin\alpha t)^2}{t^2}$ *Laplaso transformaciją.* (2)

Pažymėkime $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin 2\alpha t dt = \frac{2\alpha}{(2\alpha)^2+s^2}$. Tada iš dalies (c) rezultato išplaukia

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\sin 2\alpha t}{t}dt = G(s)$$

$$= \int_s^{+\infty}\frac{2\alpha}{4\alpha^2+\sigma^2}d\sigma$$

$$= \int_s^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{\sigma}{2\alpha}\right)^2}d\left(\frac{\sigma}{2\alpha}\right)$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma}{2\alpha}\right)\Big|_s^{+\infty} = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{s}{2\alpha}\right)$$

e) *Apskaičiuokite* $I(\alpha,s)$ *(reiškinio su arktangentu neintegruokite!).*
Kadangi $I(0,s)=0$, tai

$$I(\alpha_0,s) = \int_0^{\alpha_0}\frac{\partial}{\partial\alpha}I(\alpha,s)d\alpha$$

$$= \int_0^{\alpha_0}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{s}{2\alpha}\right)d\alpha.$$

f) *Įrodykite, kad* $I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{(\sin\alpha t)^2}{t^2}dt = \frac{\pi\alpha}{2}$ *(perėjimą prie ribos integrale su arktangentu pagrįskite).*

Dalyje (a) įrodėme, kad $\lim_{s\downarrow 0} I(\alpha,s) = I(\alpha)$, o dalyje (e) apskaičiavome $I(\alpha,s)$. Taigi

$$I(\alpha_0) = \lim_{s\downarrow 0}\int_0^{\alpha_0}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{s}{2\alpha}\right)d\alpha$$

$$= \int_0^{\alpha_0}\lim_{s\downarrow 0}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{s}{2\alpha}\right)d\alpha$$

$$= \int_0^{\alpha_0}\frac{\pi}{2}d\alpha = \frac{\pi}{2}\alpha_0.$$

Perėjimo prie ribos po integralu opercijai pagrįsti pakanka nurodyti pointegralinės funkcijos integruojamą mažorantę

$$\left|\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{s}{2\alpha}\right| \le 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi,\ s\ge 0, \alpha\in\mathbf{R}.$$

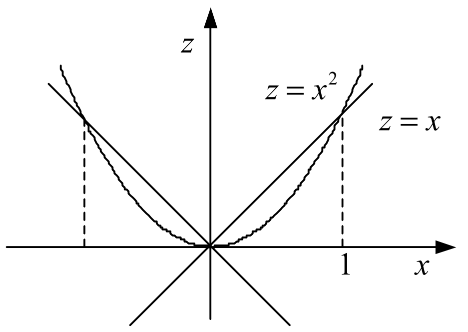
7. *Raskite tūrį figūros, apribotos paviršiais* $z = x^2+y^2, z^2 = x^2+y^2$. *Įvardinkite paviršius. Jei neišeis nubrėžti trimačio brėžinio, tai būtinai nubrėžkite dvimates projekcijas.*

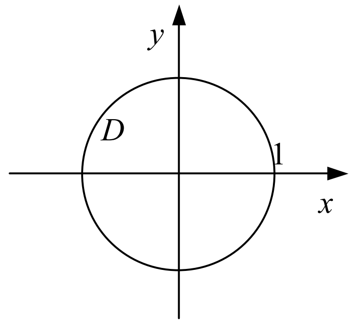
Randame paviršių susikirtimą

$$\begin{cases} z = x^2+y^2, \\ z^2 = x^2+y^2, \end{cases}$$

$$z = z^2, z = 0, z = 1,$$
$$x^2 + y^2 = 1.$$

Abu paviršiai yra sukimosi: kūgis $z_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ ir paraboloidas $z_1 = x^2 + y^2$. Todėl pakanka nubrėžti jų projekcijas *x*, *z* plokštumoje.




$$V = \iint_D (z_2(x,y) - z_1(x,y))dxdy$$
$$= \iint_{x^2+y^2 \le 1} (\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2))dxdy.$$

Pakeiskime stačiakampes koordinates į polines

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, & 0 \le r \le 1, \\ y = r\sin\varphi, & 0 \le \varphi \le 2\pi, \end{cases} \quad J = r.$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r - r^2) r dr$$
$$= 2\pi \left( \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_0^1$$
$$= 2\pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

8. *Įrodykite, kad beta funkcija* $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$, $x > 0, y > 0$ *yra logaritmiškai iškila x-so funkcija.*

Naudosimės teiginiais:
1 teiginys. Dukart diferencijuojamų logaritmiškai iškilų funkcijų suma logaritmiškai iškila.
2 teiginys. Logaritmiškai iškilų funkcijų sekos riba logaritmiškai iškila.
3 teiginys. Logaritmiškai iškila funkcija, padauginta iš konstantos, logaritmiškai iškila.

Funkcija $f_{t,y}(x) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}, 0 < t < 1, y > 0$ logaritmiškai iškila, nes
$\ln f_{t,y}(x) = \ln t^{x-1}(1-t)^{y-1} = (x-1)\ln t + (y-1)\ln(1-t)$ - tiesinė funkcija. Vadinasi, iškila funkcija.

Netiesioginį integralą (jei $x<1, y<1$) yra riba

$$B(x,y)=\lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{(n-1)/n} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Tolydžios (pagal *t*)funkcijos $f_{x,y}(t)=t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ integralą kompaktiškame intervale $\left[\frac{1}{n},\frac{n-1}{n}\right]$, $n>2$, galima parašyti kaip ribą Rymano integralinių sumų

$$g_{n,m}(x)=\sum_{k=0}^{m-1} t_k^{x-1}(1-t_k)^{y-1}\Delta t_k,$$

čia $t_k=\frac{1}{n}+\frac{k}{m}\cdot\frac{n-2}{n}, k=1,2,...,m$, $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k=\frac{n-2}{nm}$.

9. *Duota funkcija* $f(x,y)=\begin{cases}0,(x,y)=(0,0),\\ \frac{2xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0).\end{cases}$

a) *Apskaičiuokite* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Dalines išvestines reikia skaičiuoti pagal apibrėžimą

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{0}{y^2}-0}{x}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

b) *Ar funkcija diferencijuojama taške* $(0,0)$? *Jei taip, tai suraskite* $f'(0,0)$, *jei ne – tai įrodykite, kad funkcija nediferencijuojama šiame taške.*

Diferencijuojama funkcija turi būti tolydi. Įrodysime, kad funkcija nėra tolydi taške $(0,0)$. Rasime dvi argumentų sekas, konverguojančias į tašką $(0,0)$, bet funkcijų reikšmių sekos turės skirtingas ribas.

$$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},0\right), f(x_n,y_n)=0\to 0, \text{ kai } n\to\infty;$$

$$(x_n',y_n')=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right), f(x_n',y_n')=\frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=1\to 1, \text{ kai } n\to\infty.$$

Paruošė R.Kudžma