Kontrolinis darbas
2002.11.09

1. Nubrėžkite funkcijos $f(x,y)=\frac{2}{3}y^3+2x^2y+y^2-x^2$ portretą. (15)

2. Funkcijos portrete iš (1) dalies užtušuokite (lengvai) aibę $f^{-1}(0,+\infty)\cap\{y<0\}$. Įrodykite, kad tai atvira aibė. (4)

3. Raskite funkcijos $u=\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$ sąlyginius ekstremumus, kai $4x+y+z=0, x>0, y>0, z>0.$ Naudokite Lagranžo daugiklių metodą. (7)

4. Nubrėžkite kreivę $F(x,y)=(x-1)^3-y^2=0$, funkcijos $f(x,y)=x^2+y^2$ lygio linijas. Akivaizdu, kad funkcija *f*, apribota sąlyga $F=0$, įgyja minimumą, lygų 1, taške $(1,0)$. Pagrįskite tai. (2)
   Kodėl sąlyginio minimumo taške negalioja Lagranžo teorema, t.y. nors $\frac{\partial L}{\partial y}(1,0,\lambda)=0, \frac{\partial L}{\partial \lambda}(1,0,\lambda)=0$, bet $\frac{\partial L}{\partial x}(1,0,\lambda)\neq 0$? (4)

5. Sakykime, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tolydžiai diferencijuojama funkcija ir $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$.
   Įrodykite, kad $grad f(x_0,y_0)$ statmenas lygio linijai $f(x,y)=f(x_0,y_0)$. (3)

6. Įrodykite, kad aibė $K=\{a,b\}, a,b\in\mathbb{R}^k$ (aibė iš dviejų elementų) yra kompaktiška aibė, naudodamiesi kompaktiškos aibės apibrėžimu
   a) su posekiais; (2)
   b) su atviraisiais denginiais. (3)

7. Plokštumoje $\mathbb{R}^2$ sukonstruokite begalines aibes:
   a) neturinčią ribinio taško; (1)
   b) turinčią vieną ribinį tašką; (1)
   c) turinčią du ribinius taškus; (1)
   d) uždarą ir turinčią vieną ribinį tašką. (1)

8.
   a) Parašykite apibrėžimą, kad funkcija $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ yra diferencijuojama taške $(1,0)$. (1)
   b) Įrodykite pagal apibrėžimą, kad funkcija iš dalies (a) yra diferencijuojama taške $(1,0)$ ir suraskite funkcijos išvestinę tame taške. (2)
   c) Kaip galima surasti šią išvestinę papraščiau? Pagrįskite tai. (3)

Paruošė R.Kudžma