Kontrolinis darbas
2002.11.09
Sprendimai

1. Nubrėžkite funkcijos $f(x,y)=\frac{2}{3}x^3+2xy^2+x^2-y^2$ portretą. (15)

a) Apskaičiuojame dalines išvestines

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x^2+2y^2+2x=2(x^2+x+y^2),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=4xy-2y=2y(2x-1).$$

b) Surandame horizontaliąją daugdarą

$$H\colon\ \frac{\partial f}{\partial x}=2(x^2+x+y^2)=0,$$
$$x^2+x+\frac{1}{4}+y^2=\frac{1}{4},$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Tai apskritimas, kurio centras $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ir spindulys $\frac{1}{2}$.

Surandame vertikaliąją daugdarą

$$V\colon\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y(2x-1)=0.$$

Tai dvi tiesės $y=0, x=\frac{1}{2}.$

c) Tiesė $x=\frac{1}{2}$ yra vertikalioji daugdara. Jei joje nubrėšime labai daug vertikalių liestinių atkarpų, tai gausime ištisinę liniją. Todėl reikia patikrinti, ar ši tiesė nėra lygio linija.

$$f\left(\frac{1}{2},y\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\cdot\frac{1}{2}\cdot y^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-y^2$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+y^2-y^2=\frac{1}{3}.$$

Iš tikrųjų, tai lygio linija.

d) Surandame ypatinguosius taškus $H\cap V$.
Geometriškai akivaizdu, kad ypatingieji taškai yra $P=(-1,0)$ ir $O=(0,0)$. Tai nesunku patikrinti ir analiziškai:

$$y=0\to\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow x_{1,2}=-\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\Rightarrow x_1=-1, x_2=0,$$
$$x=\frac{1}{2}\to\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}\Rightarrow y^2=-\frac{3}{4}.$$ Šaknų nėra.

Taškas $Q=\left(\frac{1}{2},0\right)$ nėra ypatingasis taškas, nes $Q\in V$, bet $Q\notin H$.

e) Apskaičiuojame išvestinės ženklą

$$y'_x(x,y) = -\frac{2(x^2+x+y^2)}{2y(2x-1)},$$
$$y'_x(1,1) = -\frac{1+1+1}{1(2-1)} = -3 < 0.$$

Iš išvestinės išraiškos matyti, kad ji keis ženklą, kertant horizontaliąją ar vertikaliąją daugdaras.

f) Skaičiuojame antrąsias išvestines.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4x+2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x-2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4y.$$
$$f''(x,y) \sim \begin{pmatrix} 4x+2 & 4y \\ 4y & 4x-2 \end{pmatrix}.$$
$$f''(P) = f''(-1,0) \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \Delta_1(P) = -6, \Delta_2(P) = 12 .$$

Taškas P – maksimumo taškas.

$$f''(O) = f''(0,0) \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \Delta_2(O) = -4 < 0 .$$

Taškas O – balno taškas.

g) Skaičiuokime separatrisės liestinių krypties vektoriaus koordinates balno taške.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O)a^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(O)ab + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(O)b^2 = 0,$$
$$2a^2 - 2b^2 = 0,$$
$$a = \pm b, \tau_1 = (1,1), \tau_2 = (1,-1)$$

h) Brėžiame separatrisę. Separatrisės lygtis

$$\frac{2}{3}x^3 + 2xy^2 + x^2 - y^2 = 0 .$$

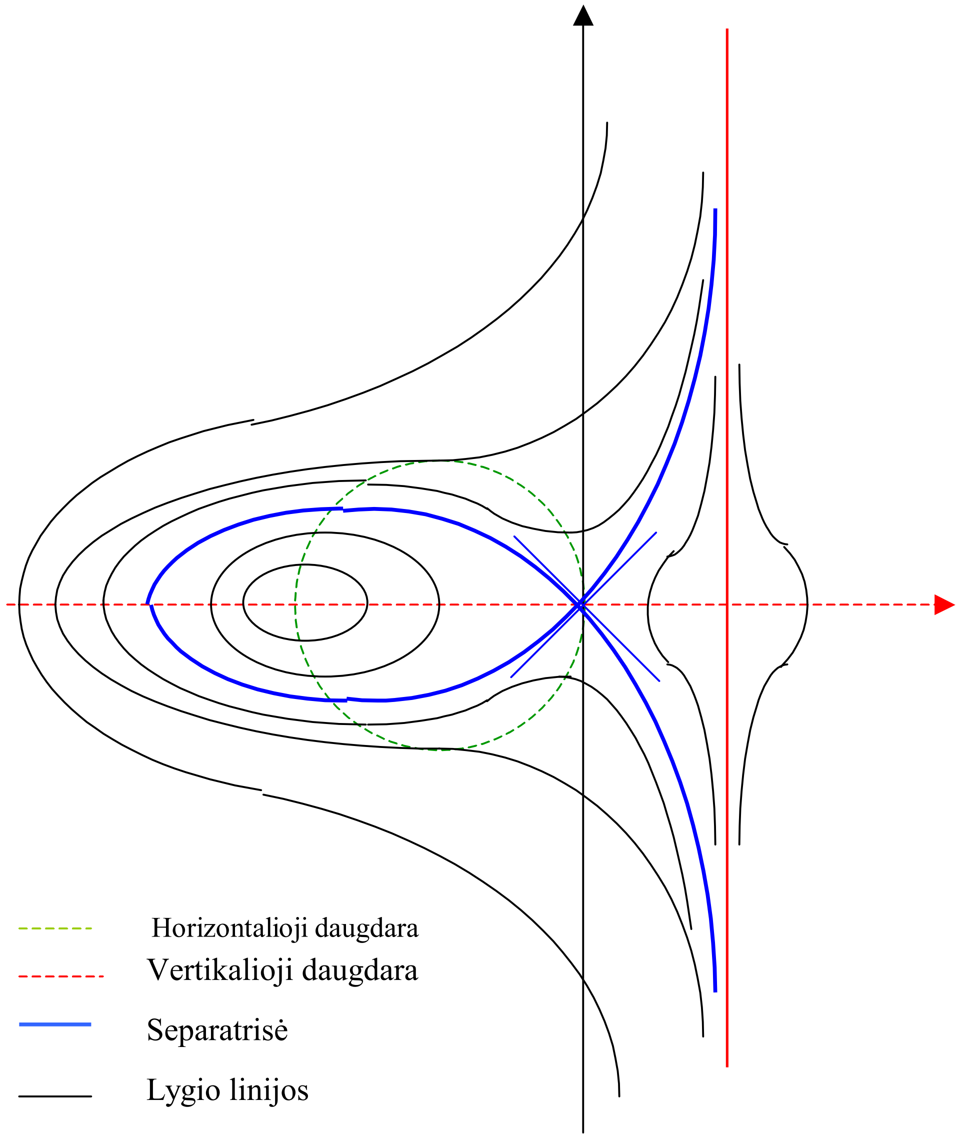
Galima išspręsti y.

$$y^2(2x-1) = -x^2\left(\frac{2}{3}x+1\right),$$
$$y^2 = \frac{x^2(2x+3)}{3(1-2x)},$$
$$y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{x^2(2x+3)}{3(1-2x)}} = \pm|x|\sqrt{\frac{2x+3}{3(1-2x)}}.$$

Iš čia matyti, kad funkcijų apibrėžimo sritis yra intervalas $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, o tiesė $x = \frac{1}{2}$ - vertikalioji asimptotė.

i) Brėžiame kitas lygio linijas.

2. Funkcijos portrete iš (1) dalies užtušuokite (lengvai) aibę $f^{-1}(0,+\infty) \cap \{x<0\}$. Įrodykite, kad tai atvira aibė. (4)



Brėžinyje aibė $f^{-1}(0,+\infty) \cap \{x<0\}$ nuspalvinta žaliai.

Funkcija $f(x,y) = \dfrac{2}{3}x^3 + 2xy^2 + x^2 - y^2$ tolydi visoje plokštumoje, aibė $(0,+\infty)$ - atvira. Todėl aibė $f^{-1}(0,+\infty)$ -atvira (buvo toks teiginys apie atvirų aibių pirmvaizdžius). Aibė $\{x<0\}$ - taip pat atvira. Tai galima įrodyti tiesiogiai pagal apibrėžimą arba parašyti $\{x<0\} = g^{-1}(-\infty,0)$, čia $g(x,y)=x$ - tolydi funkcija erdvėje $\mathbb{R}^2$. Tada dviejų atvirų aibių sankirta – taip pat atvira aibė.

3. Raskite funkcijos $u = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$ sąlyginius ekstremumus, kai $4x + y + z = 1, x > 0, y > 0, z > 0.$
Naudokite Lagranžo daugiklių metodą. (7)

Sprendimas. Parašome Lagranžo funkciją
$L(x, y, z, \lambda) = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} + \lambda(4x + y + z - 1)$.
Apskaičiuojame dalines išvestines ir sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + 4\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{4}{y^2} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{9}{z^2} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Sprendžiame lygčių sistemą
$x = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}, y = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}, z = \frac{3}{\sqrt{\lambda}}.$
Traukdami kvadratinę šaknį, imame tik teigiamas reikšmes, nes sąlygoje yra apribojimas $x > 0, y > 0, z > 0.$ Iš sąryšio lygties $4x + y + z = 1$ surandame $\lambda = 49$. Tada $x_0 = \frac{1}{14}, y_0 = \frac{2}{7}, z_0 = \frac{3}{7}$. Apskaičiuojame antrąsias dalines išvestines $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{8}{y^3}, \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = \frac{18}{z^3}$. Antros eilės mišriosios išvestinės lygios nuliui. Tada kvadratinė forma

$$Q(x_0, y_0, z_0, h, k, l) = \frac{2}{x_0^3} h^2 + \frac{8}{y_0^3} k^2 + \frac{18}{z_0^3} l^2$$

yra teigiamai apibrėžta visoje erdvėje $\mathbb{R}^3$. Akivaizdu, kad ji bus teigiamai apibrėžta ir bet kokiame poerdvyje. Po šios pastabos toliau galima nieko ir nebeskaičiuoti. Galima ir parodyti, kaip surasti vektorius τ iš paviršiaus $4x + y + z = 1$ liečiamosios plokštumos.

$$< \tau, gradF(x_0, y_0, z_0) >= 0, \tau = (h, k, l), gradF(x_0, y_0, z_0) = (4,1,1),$$

$$4h + k + l = 0,$$

$$l = -4h - k.$$

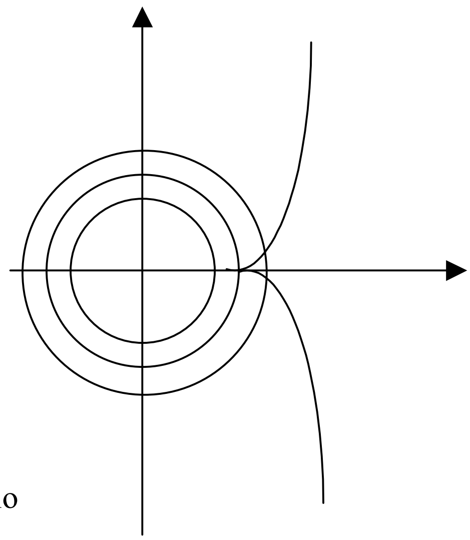
Redukuota kvadratinė forma visada teigiama (jei $h \neq 0$ ir $k \neq 0$)

$$\tilde{Q}(x_0, y_0, z_0, h, k) = \frac{2}{x_0^3} h^2 + \frac{8}{y_0^3} k^2 + \frac{18}{z_0^3} (-4h - k)^2 > 0 .$$

4. Nubrėžkite kreivę $F(x, y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$, funkcijos $f(x, y) = x^2 + y^2$ lygio linijas. Akivaizdu, kad funkcija *f*, apribota sąlyga $F = 0$, įgyja minimumą, lygų 1, taške $(1,0)$. Pagrįskite tai. (2)
Kodėl sąlyginio minimumo taške negalioja Lagranžo teorema, t.y.

nors $\frac{\partial L}{\partial y}(1,0,\lambda)=0, \frac{\partial L}{\partial \lambda}(1,0,\lambda)=0$, bet $\frac{\partial L}{\partial x}(1,0,\lambda)\neq 0$? (4)

Sprendimas.



Iš sąlygos $(x-1)^3-y^2=0$ išsprendžiame $y^2=(x-1)^3$ ir įstatome į funkciją f

$f(x,y)=x^2+y^2=x^2+(x-1)^3$.

Akivaizdu, kad ši funkcija, kai $x\geq 1$, įgyja minimumą taške $x=1$. Bet

$$\frac{\partial L}{\partial x}(1,0,\lambda)=2x+3\lambda(x-1)^2\Big|_{\substack{x=1,\\ y=0}}=2$$

su bet kokiu λ.

Išvesdami būtinąsias sąlyginio ekstremumo sąlygas, naudojomės neišreikštinės funkcijos teorema sąlyginio ekstremumo taške. Duotuoju atveju

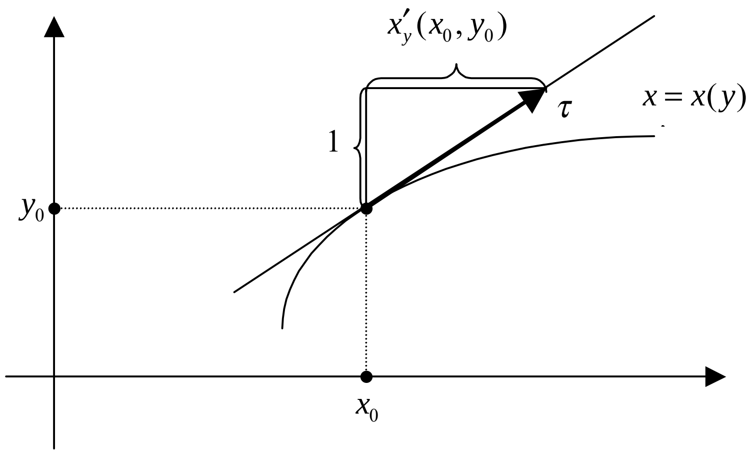
$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)=3(x-1)^2\Big|_{x=1}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0)=2y\Big|_{y=0}=0.$$

Taigi NFT taške $(1,0)$ negalioja.

5. Sakykime, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tolydžiai diferencijuojama funkcija ir $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$. Įrodykite, kad $grad f(x_0,y_0)$ statmenas lygio linijai $f(x,y)=f(x_0,y_0)$. (3)

Sprendimas.



Kadangi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$, tai galima taikyti NFT. Egzistuoja taško y_0 aplinka U, taško x_0 aplinka V ir funkcija $x=x(y), y\in U$, tenkinanti sąlygas:

$x(y_0)=x_0$, $f(x(y),y)-f(x_0,y_0)=0$ ir

$$x'_y(x,y)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)},\ y\in U.$$

Tada kreivė $f(x,y)-f(x_0,y_0)=0$ taško (x_0,y_0) aplinkoje sutaps su funkcijos $x=x(y), y\in U$ grafiku. Grafiko liestinės krypties vektorių galima apskaičiuoti

$$\tau=(x'_y(x_0,y_0),1)=\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)},1\right).$$

Dabar elementaru patikrinti, kad vektoriai τ ir

$$gradf(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

yra ortogonalūs.

6. Įrodykite, kad aibė $K=\{a,b\}, a,b\in\mathbb{R}^k$ (aibė iš dviejų elementų) yra kompaktiška aibė, naudodamiesi kompaktiškos aibės apibrėžimu
   a) su posekiais; (2)
   b) su atviraisiais denginiais. (3)

Sprendimas.

a) Jei seka sudaryta iš dviejų elementų (taškų), tai vienas iš jų pasikartoja be galo daug kartų. Išrinkime posekį, sudarytą iš to be galo daug kartų pasikartojančio elemento. Tai bus pastovi seka, kuri ir konverguos į tą elementą.

b) Sakykime, atvirųjų aibių sistema $\{G_\alpha,\alpha\in A\}$ padengia aibę $K=\{a,b\}$, t.y. $K=\{a,b\}\subset\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha$.

Tada egzistuos tokie indeksai $\alpha_1\in A,\alpha_2\in A$, kad $a\in G_{\alpha_1}, b\in G_{\alpha_2}$. Taigi $K\subset G_{\alpha_1}\cup G_{\alpha_2}$.

7. Plokštumoje $\mathbb{R}^2$ sukonstruokite begalines aibes:
   a) neturinčią ribinio taško; (1)
   b) turinčią vieną ribinį tašką; (1)
   c) turinčią du ribinius taškus; (1)
   d) uždarą ir turinčią vieną ribinį tašką. (1)

Sprendimas.

a) $A=\{(n,n),n\in\mathbb{N}\}$;

b) $B=\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),n\in\mathbb{N}\right\}$; ribinis taškas $(0,0)$;

c) $C=\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),\left(1+\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),n\in\mathbb{N}\right\}$; ribiniai taškai $(0,0)$ ir $(1,0)$;

d) $D = B \cup \{(0,0)\}$.

8.

a) Parašykite apibrėžimą, kad funkcija $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ yra diferencijuojama taške $(1,0)$. (1)

b) Įrodykite pagal apibrėžimą, kad funkcija iš dalies (a) yra diferencijuojama taške $(1,0)$ ir suraskite funkcijos išvestinę tame taške. (2)

c) Kaip galima surasti šią išvestinę paprasčiau? Pagrįskite tai. (3)

Sprendimas.

a) Funkcija $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ yra diferencijuojama taške $(1,0)$, jei egzistuoja tokios konstantos A_1, A_2, kad

$$f(1+h_1, h_2) = f(1,0) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + o(|h|), |h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \to 0,$$
$$(1+h_1)^2 + h_2^2 = 1 + A_1 h_1 + A_2 h_2 + o(|h|), |h| \to 0.$$

b)

$$\begin{aligned}(1+h_1)^2 + h_2^2 &= 1 + 2h_1 + h_1^2 + h_2^2 \\ &= 1 + 2h_1 + o(|h|), |h| \to 0;\end{aligned}$$

Vadinasi, funkcijos $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ išvestinė taške $(1,0)$ yra tiesinis atvaizdis $A = (A_1, A_2) = (2,0)$;

c) Jei egzistuoja funkcijos $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ dalinės išvestinės taško $(1,0)$ aplinkoje ir jos tolydžios tame taške, tai išvestinė

$$f'(1,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,0) \right).$$

Dalinės išvestinės $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2$ - tolydžios funkcijos visoje plokštumoje $\mathbb{R}^2$. Taigi $f'(1,0) = (2,0)$.